

Vrije Universiteit Brussel
Faculteit Ingenieurwetenschappen



Lineaire Algebra

Volume II

Philippe Cara

Syllabus voor het college “Lineaire algebra: stelsels, matrices en afbeeldingen”
in de Eerste Bachelor Ingenieurwetenschappen
en het Eerste jaar van de verkorte programma’s Burgerlijk Ingenieur
alsook de eerste bachelors Wiskunde en Fysica.

2017

Inhoudsopgave

5	Eigenwaarden en eigenvectoren	3
5.1	Eigenwaarden en eigenvectoren	3
5.2	Diagonalisatie van een vierkante matrix	6
5.3	De stelling van Cayley-Hamilton	11
6	Euclidische ruimten	14
6.1	Inwendige producten	14
6.2	Orthonormale basissen	18
6.3	Toegevoegde lineaire afbeeldingen	23
6.4	Orthogonale lineaire afbeeldingen	24
6.5	Volume en vectorieel product	29
7	Prehilbertruimten	34
7.1	Prehilbertruimten	34
7.2	Hermitische en unitaire lineaire afbeeldingen	37
7.3	Diagonalisatie van hermitische en unitaire lineaire afbeeldingen	40
7.4	Banachruimten en Hilbertruimten	44
8	Isometrieën	46
8.1	Isometrieën	46
8.2	Classificatie van de isometrieën	53
9	Kwadratische vormen en kwadrieken	58
9.1	Bilineaire afbeeldingen en kwadratische vormen	58

9.2	Toepassing: extreme waarden van scalaire functies	65
9.3	Kwadratische functies en kwadrieken	70
A	Hyperbolische functies	83
	Oefeningen	85
	Bibliografie	118
	Index	118

Hoofdstuk 5

Eigenwaarden en eigenvectoren

5.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

Onderstel dat V een eindigdimensionale vectorruimte is, en dat $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is. Als E een basis van V is, dan kunnen we de matrix A van f ten opzichte van de basis E beschouwen. In dit hoofdstuk kijken we naar het volgende probleem: voor welke keuze van de basis E ziet de matrix van de lineaire afbeelding f er zo eenvoudig mogelijk uit? Hoe meer elementen van A nul zijn, hoe gemakkelijker het wordt om bewerkingen met de matrix A uit te voeren. De ideale situatie is die waarbij de matrix van A een diagonale matrix is:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Immers, indien A een diagonaalmatrix, dan is het stelsel $AX = B$ zeer eenvoudig op te lossen. Het zal verderop blijken dat het niet altijd mogelijk is om een basis van V zo te kiezen dat de matrix A diagonaal wordt. We zullen dan al tevreden zijn als we A kunnen schrijven als een bovendreiehoeksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Onderstel dat de matrix van de lineaire afbeelding f ten opzichte van een basis $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ een diagonaalmatrix is. Dan is

$$f(\vec{u}_i) = a_{ii}\vec{u}_i,$$

met andere woorden, het beeld van de basisvector \vec{u}_i is een veelvoud van \vec{u}_i . Om een basis van V te vinden waarvoor de matrix van f diagonaal wordt moeten we dus die vectoren \vec{u} zien te vinden waarvoor $f(\vec{u})$ een veelvoud is van \vec{u} . Vandaar de volgende definitie.

Definitie 5.1.1. Beschouw een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$. Een vector $\vec{u} \neq \vec{0} \in V$ noemen we een **eigenvector** van f als

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}: f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

We noemen dan λ de **eigenwaarde** behorende bij de eigenvector \vec{u} .

We hebben dan onmiddellijk volgende eigenschap.

Stelling 5.1.2. De matrix van een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ ten opzichte van een basis E is diagonaal als en alleen als E een basis is die bestaat uit eigenvectoren.

In deze paragraaf zullen we zien hoe we eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix kunnen bepalen.

Stelling 5.1.3. Onderstel dat V een eindigdimensionale ruimte is. $\lambda \in \mathbb{K}$ is een eigenwaarde van een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ als en slechts als $\det(f - \lambda 1_V) = 0$.

Bewijs. $\lambda \in \mathbb{K}$ is een eigenwaarde van f als er een vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ bestaat zodat $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, of, equivalent, $(f - \lambda 1_V)(\vec{u}) = \vec{0}$. Deze laatste voorwaarde betekent dat $f - \lambda 1_V$ niet injectief is, hetgeen equivalent is met de voorwaarde $\det(f - \lambda 1_V) = 0$. \square

De vergelijking

$$\det(f - \lambda 1_V) = 0 \tag{5.1}$$

wordt de **karacteristieke vergelijking** genoemd. Kies een basis $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, en onderstel dat $A = [f]_{E,E}$. Dan wordt (5.1):

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \tag{5.2}$$

of

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.3}$$

Voor $n = 2$ wordt deze vergelijking:

$$\lambda^2 - \text{Sp}(A)\lambda + \det(A) = 0 \tag{5.4}$$

en voor $n = 3$:

$$-\lambda^3 + \text{Sp}(A)\lambda^2 - \text{Sp}(\text{adj}(A))\lambda + \det(A) = 0 \tag{5.5}$$

In het algemeen is $\det(A - \lambda I_n)$ een veelterm van graad n in λ . Immers, het is een som van $n!$ termen die elk, op het teken na, het product is van n elementen uit de matrix, waarvan er geen twee op eenzelfde rij of kolom staan. Bijgevolg zijn er hiervan ten hoogste n van de vorm $a_{ii} - \lambda$.

We noemen deze veelterm de **karacteristieke veelterm** van de lineaire afbeelding f (of van de matrix A). Van de coëfficiënten van deze veelterm kunnen we er enkele expliciet opschrijven:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{Sp}(A) \lambda^{n-1} + \cdots - \text{Sp}(\text{adj}(A)) \lambda + \det(A) \tag{5.6}$$

De karakteristieke veelterm van een lineaire afbeelding f hangt niet af van de gekozen basis. Met andere woorden:

Stelling 5.1.4. *Als A en B de matrices zijn van een lineaire afbeelding f tenopzichte van twee verschillende basissen van V , dan is $P_A = P_B$.*

Bewijs. We kunnen dit ook rechtstreeks bewijzen: uit Stelling 2.6.3 van volume I van deze cursus volgt dat $B = MAM^{-1}$, waarbij M , de overgangsmatrix tussen de twee basissen, een reguliere matrix is. Dan is

$$P_B(\lambda) = \det(MAM^{-1} - \lambda I_n) = \det(M) \det(A - \lambda I_n) \det(M)^{-1} = P_A(\lambda)$$

□

Als $\lambda \in \mathbb{K}$ een eigenwaarde is van de lineaire afbeelding f , dan zijn de bijhorende eigenvectoren de niet-nulle oplossingen van de vergelijking

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

De verzameling van de eigenvectoren is dus $\text{Ker}(f - \lambda 1_V) \setminus \{\vec{0}\}$. Dit is geen deelruimte van V ! Als we een basis E van V kiezen, kunnen we de voorwaarde om een eigenvector te zijn schrijven met coördinaten en wordt deze

$$AX = \lambda X.$$

Dit is een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen, en de oplossing is nu een deelruimte van \mathbb{K}^n .

Algoritme 5.1.5. *Om de eigenwaarden en eigenvectoren van een vierkante matrix A te vinden gaan we als volgt te werk:*

1. *Bepaal de wortels λ van de karakteristieke vergelijking*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

2. *Voor elke wortel λ lossen we het lineair stelsel*

$$AX = \lambda X$$

op.

Als n groot wordt, dan is dit algoritme in de praktijk niet handig. Men kan dan numerieke technieken ontwikkelen om de eigenwaarden en eigenvectoren te bepalen. We verwijzen hier naar de cursus “Numerieke algoritmen”.

5.2 Diagonalisatie van een vierkante matrix

Laten we terugkeren naar ons oorspronkelijk probleem: kunnen we een basis van V vinden waarin de matrix van f diagonaal is? Hiertoe moet deze basis bestaan uit eigenvectoren van f . Onderstel dat we een stel eigenvectoren hebben. De volgende stelling vertelt ons wanneer deze lineair onafhankelijk zijn.

Stelling 5.2.1. *Onderstel dat $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ eigenvectoren zijn van een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ met eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die twee aan twee verschillend zijn. Dan zijn de vectoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ lineair onafhankelijk.*

Bewijs. Onderstel dat de vectoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ lineair afhankelijk zijn. Dan is één van de vectoren \vec{u}_s een lineaire combinatie van de vorige:

$$\vec{u}_s = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i \vec{u}_i \quad (5.7)$$

Neem voor s de kleinst mogelijke index waarvoor \vec{u}_s een lineaire combinatie van de vorige vectoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{s-1}$ is. Uit (5.7) volgt dat

$$f(\vec{u}_s) = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i f(\vec{u}_i)$$

of

$$\lambda_s \vec{u}_s = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i \lambda_i \vec{u}_i \quad (5.8)$$

Vermenigvuldig (5.7) met λ_s en trek hiervan (5.8) af. Dan volgt dat

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i (\lambda_s - \lambda_i) \vec{u}_i \quad (5.9)$$

Omdat $\lambda_s \neq \lambda_i$ is hierin tenminste een coëfficiënt $\alpha_i (\lambda_s - \lambda_i) \neq 0$. Dus is het stel vectoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{s-1}$ lineair afhankelijk, en dit is strijdig met de minimaliteit van s . \square

De karakteristieke vergelijking $P_A(\lambda) = 0$ is een veeltermvergelijking van graad n . Indien deze n verschillende wortels heeft, dan zijn de bijhorende eigenvectoren lineair onafhankelijk, en dan vormen deze een basis van V . Dan hebben we een basis van eigenvectoren, en dus is A diagonaliseerbaar.

Voorbeeld 5.2.2. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$\det(A) = 8, \quad \text{Sp}(A) = 7, \quad \text{Sp}(\text{adj}(A)) = 14$$

en dus is de karakteristieke vergelijking

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = 0$$

De wortels hiervan zijn $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 4$. Bijhorende eigenvectoren zijn

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Deze vormen een basis, en de matrix A is dus diagonaliseerbaar.

Als we werken over de complexe getallen, dan is de karakteristieke veelterm steeds te schrijven als een product van lineaire factoren (cf. cursus “Ingenieursvaardigheden”). Als we werken over de reële getallen, dan kan het zijn dat de karakteristieke vergelijking niet volledig te ontbinden is. De matrix A is dan niet diagonaliseerbaar.

Voorbeeld 5.2.3. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dit is de matrix van een rotatie over een hoek θ . De karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

wordt nu

$$(\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = 0$$

en deze heeft geen reële wortels, tenzij $\theta = k\pi$. Meetkundig is dit trouwens duidelijk: als we het vlak draaien over een hoek die geen veelvoud van π is, dan wordt geen enkele vector in een veelvoud van zichzelf omgezet.

Indien we werken over de complexe getallen, dan heeft de karakteristieke vergelijking wel wortels:

$$\cos \theta - \lambda = \mp i \sin \theta$$

of

$$\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$$

De eigenvectoren behorende bij de eigenwaarde $e^{i\theta}$ worden gevonden uit het stelsel

$$\begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = \cos \theta x + i \sin \theta x \\ \sin \theta x + \cos \theta y = \cos \theta y + i \sin \theta y \end{cases}$$

of

$$-y = ix$$

De oplossingen zijn dus de veelvouden van de vector $(1, -i)$. We hebben inderdaad dat

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + i \sin \theta \\ \sin \theta - i \cos \theta \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

De eigenvectoren behorende bij de eigenwaarde $e^{-i\theta}$ zijn de veelvouden van de vector $(1, i)$ (verifieer dit zelf).

De lezer zou nu kunnen denken dat over \mathbb{C} elke matrix diagonaliseerbaar is. Immers, over \mathbb{C} is elke veelterm te ontbinden in lineaire factoren. Er is echter nog een andere moeilijkheid: het zou kunnen dat de karakteristieke veelterm een *meervoudige* wortel heeft.

Herhaal dat $\alpha \in \mathbb{C}$ een wortel is van de veelterm P met *multipliciteit* m als we P kunnen ontbinden tot

$$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$$

met $Q(\alpha) \neq 0$.

Onderstel nu dat λ een wortel is van de karakteristieke vergelijking met multipliciteit $m > 1$. Indien de dimensie d van de deelruimte van de eigenvectoren (samen met de nulvector) behorende bij λ ook m is, dan is er geen probleem: bij de eigenwaarde λ horen dan m lineaire onafhankelijke eigenvectoren. We zullen hierna bewijzen dat steeds geldt dat $d \leq m$. Hierbij is het wel mogelijk dat $d < m$, zoals blijkt uit het volgend voorbeeld.

Voorbeeld 5.2.4. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De karakteristieke vergelijking is nu

$$(1 - \lambda)^2 = 0$$

en $\lambda = 1$ is een dubbele wortel. De eigenvectoren zijn de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases}$$

De eigenvectoren zijn dus de veelvouden van $(1, 0)$, en deze vormen een deelruimte van dimensie 1. We kunnen dus besluiten dat de matrix A niet kan gediagonaliseerd worden, zelfs niet als we hem als een complexe matrix beschouwen.

Stelling 5.2.5. Als λ een wortel is met multipliciteit m van de karakteristieke vergelijking $P_f(X) = 0$ van een lineaire afbeelding $f: V \rightarrow V$, dan geldt voor de ruimte $\text{Ker}(f - \lambda 1_V)$ van eigenvectoren behorende bij λ dat

$$\dim(\text{Ker}(f - \lambda 1_V)) \leq m$$

Bewijs. Onderstel dat $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$ een basis is van $\text{Ker}(f - \lambda 1_V)$. Vul deze aan tot een basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d, \vec{v}_{d+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ van V . Ten opzichte van deze basis is de matrix van f van de vorm

$$\begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

waarbij C een vierkante $(n-d) \times (n-d)$ -matrix is. Hieruit volgt dat

$$P_f(X) = (\lambda - X)^d P_C(X)$$

en dus is λ een wortel van de karakteristieke vergelijking met multipliciteit tenminste d , zodat $d \leq m$. \square

Hoe weten we of een matrix A al dan niet kan gediagonaliseerd worden? In de praktijk kan men natuurlijk altijd de eigenwaarden en eigenvectoren uitrekenen en kijken of men voldoende lineair onafhankelijk eigenvectoren heeft. In het volgende hoofdstuk zullen we aantonen dat een reële symmetrische matrix (en meer algemeen een complexe hermitische matrix) steeds te diagonaliseren is.

Uit het bovenstaande voorbeeld weten we dat niet elke matrix diagonaliseerbaar is, zelfs niet over de complexe getallen. In deze paragraaf behandelen we het volgende probleem: kunnen we voor een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ (V eindigdimensionaal) een basis vinden zodanig dat de matrix van f tenopzichte van deze basis een bovendriehoeksmatrix wordt? We zullen zien dat dit over de complexe getallen steeds het geval is.

Stelling 5.2.6. *Onderstel dat $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is. Dan bestaat er een basis van V tenopzichte waarvan de matrix van f een bovendriehoeksmatrix is als en slechts als de karakteristieke veelterm P_f kan ontbonden worden als een product van lineaire factoren over \mathbb{K} .*

Bewijs. Eén implicatie is triviaal vermits de karakteristieke veelterm mag berekend worden in de basis waarin we een bovendriehoeksmatrix hebben.

We zullen de andere implicatie bewijzen per inductie op de dimensie van V . Indien $\dim(V) = 1$, dan is de stelling triviaal. Onderstel dat de stelling waar is voor $\dim(V) = n$. Het volstaat dan om de stelling te bewijzen voor $\dim(V) = n + 1$.

Neem een wortel α van de karakteristieke veelterm P_f , en een bijhorende eigenvector \vec{v}_0 , zodat

$$f(\vec{v}_0) = \alpha \vec{v}_0$$

Vul $\{\vec{v}_0\}$ aan tot een basis $\{\vec{v}_0, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ van V , en schrijf $W = \text{vect}\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$. Dan is

$$V = \text{vect}\{\vec{v}_0\} \oplus W$$

We noteren $p_1 : V \rightarrow \mathbb{K}\vec{v}_0$ en $p_2 : V \rightarrow W$ voor de projecties van V op $\mathbb{K}\vec{v}_0$ en W . Voor elke $\vec{v} \in V$ geldt dan dat

$$\vec{v} = p_1(\vec{v}) + p_2(\vec{v}) \tag{5.10}$$

Bekijk nu de afbeelding $g : W \rightarrow W$ gedefinieerd door

$$g : W \xrightarrow{f|_W} V \xrightarrow{p_2} W$$

De matrix van f ten opzichte van $\{\vec{v}_0, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ is van de vorm

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en de matrix van g tenopzichte van $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ is dan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt ook dat

$$P_f(\lambda) = (\alpha - \lambda)P_g(\lambda)$$

Ook P_g kan dus volledig ontbonden worden in lineaire factoren. We kunnen de inductiehypothese toepassen op W , en er bestaat een basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ van W waarin de matrix van g een bovendriehoeksmatrix is:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Dit betekent dat voor $r = 1, 2, \dots, n$:

$$g(\vec{v}_r) = p_2(f(\vec{v}_r)) = \sum_{i=1}^r b_{ir}\vec{v}_i$$

en dus is

$$f(\vec{v}_r) = p_1(f(\vec{v}_r)) + p_2(f(\vec{v}_r)) = b_{0r}\vec{v}_0 + \sum_{i=1}^r b_{ir}\vec{v}_i$$

waarbij we $b_{0r}\vec{v}_0$ noteerden voor $p_1(f(\vec{v}_r))$. De matrix van f tenopzichte van de basis $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ is nu

$$\begin{pmatrix} \alpha & b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0n} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

en dit is een bovendriehoeksmatrix. □

Gevolg 5.2.7. *Onderstel dat V een eindigdimensionale complexe vectorruimte is. Voor elke lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ kan een basis van V gevonden worden tenopzichte waarvan de matrix van f een bovendriehoeksmatrix is.*

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit stelling 5.2.6 en de grondstelling van de algebra. □

Men kan zich nu afvragen in hoeverre men dit resultaat kan verbeteren, met in het achterhoofd het volgende idee: hoe meer nullen in de matrix van een lineaire afbeelding, hoe beter. Zonder bewijs vermelden we het volgende resultaat:

Stelling 5.2.8. *Onderstel dat V een eindigdimensionale complexe vectorruimte is. Voor elke lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ kan een basis E van V gevonden worden tenopzichte waarvan de matrix van f de volgende vorm aanneemt:*

$$[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{pmatrix}$$

Hierin stelt 0 steeds de nulmatrix voor, en is B_i een matrix van de vorm

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Men noemt dit de **Jordanvorm**, en men noemt de B_i de **Jordanblokken**.

5.3 De stelling van Cayley-Hamilton

Beschouw een veelterm

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$$

met reële of complexe coëfficiënten. We kunnen hierin X vervangen door een reëel of complex getal x , en zo krijgen we de *veeltermfunctie*

$$P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto P(x)$$

Evengoed kunnen we X vervangen door een vierkante matrix. Het resultaat is dan opnieuw een vierkante matrix.

Voorbeeld 5.3.1. Voor $P(X) = X^2 - X + 1$ en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vinden we

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Merk op dat de constante term in de veelterm in feite vervangen wordt door deze term maal de eenheidsmatrix. We kunnen zelfs X vervangen door een lineaire afbeelding f , als we overeenkomen om X^n te vervangen door $f \circ f \circ \dots \circ f$ (n keer). De gewone rekenregels blijven geldig, bijvoorbeeld, indien een veelterm $P(X)$ kan gefactoriseerd worden als $P(X) = M(X)N(X)$, dan geldt voor elke vierkante matrix A dat $P(A) = M(A)N(A)$.

Onderstel nu dat A een vierkante matrix is, en dat A een diagonaalmatrix is:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

De karakteristieke veelterm van A is dan

$$P_A(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \cdots (\lambda_n - X)$$

Het is nu gemakkelijk in te zien dat

$$P_A(A) = 0$$

met andere woorden de matrix A voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking. De stelling van Cayley-Hamilton vertelt ons dat elke matrix voldoet aan zijn karakteristieke vergelijking.

Stelling 5.3.2. *Onderstel dat V een eindigdimensionale vectorruimte is, en dat $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is met karakteristieke veelterm P_f . Dan is $P_f(f) = 0$.*

Bewijs. Het volstaat om de formule aan te tonen voor de matrix van de lineaire afbeelding f ten opzichte van een welgekozen basis. Immers, $P_f = P_A$ als A de matrix van f is in eender welke basis van V . Het volstaat verder om de stelling te bewijzen voor complexe vectorruimten, aangezien elke reële matrix ook beschouwd kan worden als een complexe matrix.

Onderstel dus dat V een complexe vectorruimte is, en kies een basis $E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ van V waarin de matrix van f een bovendriehoeksmatrix is (stelling 5.2.7):

$$[f]_{E,E} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De karakteristieke veelterm van f is nu

$$P_f(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X) \cdots (a_{nn} - X)$$

Stel

$$V_i = \text{vect} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i \}$$

dan hebben we dat

$$\{\vec{0}\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

en

$$\dim(V_i) = i$$

Bovendien geldt dat $f(V_i) \subset V_i$, immers, voor $j \leq i$ geldt dat

$$f(\vec{v}_j) = \sum_{k=1}^j a_{kj} \vec{v}_k \in V_j \subset V_i$$

We beweren nu dat

$$(a_{ii}1_V - f)(\vec{x}) \in V_{i-1} \text{ voor } \vec{x} \in V_i \quad (5.11)$$

Schrijf $\vec{x} = \vec{y} + \alpha \vec{v}_i$, waarbij $\vec{y} \in V_{i-1}$ en $\alpha \in \mathbb{K}$. Dan is

$$(a_{ii}1_V - f)(\vec{y}) = a_{ii}\vec{y} - f(\vec{y}) \in V_{i-1}$$

en

$$\begin{aligned} (a_{ii}1_V - f)(\alpha \vec{v}_i) &= \alpha a_{ii} \vec{v}_i - \alpha \sum_{k=1}^i a_{ki} \vec{v}_k \\ &= -\alpha \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} \vec{v}_k \in V_{i-1} \end{aligned}$$

en (5.11) volgt.

Neem nu $\vec{x} \in V = V_n$. Dan geldt achtereenvolgens

$$\begin{aligned} (a_{nn}1_V - f)(\vec{x}) &\in V_{n-1} \\ (a_{n-1,n-1}1_V - f)((a_{nn}1_V - f)(\vec{x})) &\in V_{n-2} \\ &\vdots \\ (a_{11}1_V - f) \circ \cdots \circ (a_{n-1,n-1}1_V - f) \circ (a_{nn}1_V - f)(\vec{x}) &\in V_0 = \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

en dus geldt voor elke $\vec{x} \in V$ dat

$$P_f(f)(\vec{x}) = (a_{11}1_V - f) \circ \cdots \circ (a_{n-1,n-1}1_V - f) \circ (a_{nn}1_V - f)(\vec{x}) = \vec{0}$$

zodat $P_f(f) = 0$, en dit bewijst de stelling van Cayley-Hamilton. \square

Hoofdstuk 6

Euclidische ruimten

In de voorgaande hoofdstukken hebben we gezien hoe we de begrippen rechte en vlak uit de klassieke vlakke en driedimensionale meetkunde konden veralgemenen tot het begrip lineaire variëteit in een willekeurige vectorruimte. Het begrip evenwijdigheid werd eveneens gedefinieerd, maar tot nu toe zwegen we over begrippen als loodrechte stand, hoek en lengte. Om deze te kunnen beschrijven moet onze vectorruimte uitgerust zijn met een rijkere structuur. Het zal blijken dat de theorie voor reële en complexe vectorruimten verschillend is; in dit hoofdstuk behandelen we het reële geval, het complexe geval is voor het volgend hoofdstuk.

6.1 Inwendige producten

In dit hoofdstuk zijn alle vectorruimten reële vectorruimten.

Definitie 6.1.1. *Neem een reële vectorruimte E . Een afbeelding*

$$b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

*wordt een **inwendig product** (Eng. *inner product*) genoemd indien b volgende eigenschappen bezit:*

1. b is **bilineair**

$$\begin{aligned} b(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= \alpha b(\vec{x}, \vec{z}) + \beta b(\vec{y}, \vec{z}) \\ b(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) &= \alpha b(\vec{x}, \vec{y}) + \beta b(\vec{x}, \vec{z}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$;

2. b is **symmetrisch**

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x}) \tag{6.2}$$

voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in E$;

3. b is **positief definit**

$$\vec{x} \neq \vec{0} \implies b(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (6.3)$$

We zullen dikwijls volgende notatie gebruiken:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Soms spreken we ook kortweg over een **inproduct**.

Een reële vectorruimte E die uitgerust is met een inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wordt een **Euclidische ruimte** (Eng. *Euclidean space, inner product space*) genoemd.

Voorbeelden 6.1.2. 1) Neem $E = \mathbb{R}^n$, en definieer een inwendig product b als volgt:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

voor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Het gewone scalair product op \mathbb{R}^n is dus een voorbeeld van een inwendig product. Er zijn echter vele andere voorbeelden.

2) Kies $a, b, c \in \mathbb{R}$ zodat $b^2 - ac < 0$ en $a, c > 0$. Op \mathbb{R}^2 kunnen we dan een inwendig product definiëren als volgt.

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = axx' + b(xy' + yx') + cyy'$$

Ga zelf na dat voldaan is aan de eigenschappen (6.1), (6.2), (6.3).

3) Op $E = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continu}\}$ kunnen we het volgende inwendig product definiëren:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Verifieer zelf dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product is.

De norm van een vector

Bekijken we even voorbeeld 1 in het geval $n = 2$. De lengte van een vector $\vec{x} = (x_1, x_2)$ wordt dan gegeven door de formule

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(zie bijvoorbeeld [5, Hoofdstuk 1]). De volgende definitie is op deze formule geïnspireerd.

Definitie 6.1.3. Beschouw een Euclidische ruimte E . De lengte of **norm** van $\vec{x} \in E$ wordt gegeven door de formule

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

De **afstand** tussen de vectoren \vec{x} en \vec{y} wordt gegeven door de formule

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

We zullen nu enkele elementaire eigenschappen van de norm bewijzen; deze zijn allemaal veralgemeningen van corresponderende eigenschappen in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^n .

Stelling 6.1.4. (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz)

Voor elk koppel vectoren \vec{x}, \vec{y} in een Euclidische ruimte E geldt dat

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad (6.4)$$

Bewijs. Als $\vec{x} = \vec{0}$ of $\vec{y} = \vec{0}$ dan is de formule triviaal. We kunnen dus onderstellen dat beide vectoren verschillend van nul zijn. Voor elke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha\vec{x} - \beta\vec{y}, \alpha\vec{x} - \beta\vec{y} \rangle \\ &= \alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\alpha\beta \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \beta^2 \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

Neem nu

$$\alpha = \|\vec{y}\|^2 \text{ en } \beta = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

dan volgt dat

$$\|\vec{y}\|^4 \|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{y}\|^2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 + \|\vec{y}\|^2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \geq 0$$

en

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{y}\|^2 \|\vec{x}\|^2$$

□

Stelling 6.1.5. *Neem een Euclidische ruimte E . De norm $\|\cdot\|$ voldoet aan de volgende eigenschappen, voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in E$ en $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$;
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

*Deze laatste eigenschap wordt ook de **driehoeksongelijkheid** genoemd.*

Bewijs. Bewijs 1) en 2) zelf als oefening. 3) volgt uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

□

Opmerking 6.1.6. Een reële of complexe vectorruimte E die uitgerust is met een functie

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|$$

die voldoet aan de drie eigenschappen uit stelling 6.1.5 wordt een **genormeerde ruimte** genoemd. Stelling 6.1.5 vertelt ons dus dat elke Euclidische ruimte een genormeerde ruimte is.

Volgend eenvoudig lemma zullen we later nog veel gebruiken.

Lemma 6.1.7. *Zij \vec{x} en \vec{y} twee vectoren in een Euclidische ruimte E . Indien voor elke $\vec{z} \in E$ geldt dat $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$, dan geldt $\vec{x} = \vec{y}$.*

Bewijs. Indien voor elke $\vec{z} \in E$ geldt dat $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$, hebben we ook

$$\forall \vec{z} \in E: \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$$

In het bijzonder geldt dan $\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0$ of $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 0$. Uit Stelling 6.1.5 volgt dan dat $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$ en dus $\vec{x} = \vec{y}$. \square

Stelling 6.1.8. (parallelogramregel)

In een Euclidische ruimte E geldt volgende eigenschap, voor elke $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 \quad (6.6)$$

Bewijs. Uit (6.5) volgt

$$2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \quad (6.7)$$

en

$$-2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \quad (6.8)$$

Optellen van deze twee formules geeft (6.6). \square

Orthogonale vectoren

In de Euclidische ruimte \mathbb{R}^2 zijn twee vectoren \vec{x} en \vec{y} orthogonaal als hun scalair product $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. De hoek θ tussen twee vectoren \vec{x} en \vec{y} wordt er gegeven door de formule

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

We nemen deze eigenschap als definitie voor een willekeurige Euclidische ruimte.

Definitie 6.1.9. *Twee vectoren \vec{x} en \vec{y} in een Euclidische ruimte E worden **orthogonaal** genoemd indien*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

We noteren dit als volgt:

$$\vec{x} \perp \vec{y}$$

*We zeggen ook dat \vec{x} **loodrecht** staat op \vec{y} .*

De hoek θ tussen \vec{x} en \vec{y} wordt gegeven door de formule

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Gevolg 6.1.10. (stelling van Pythagoras)

Voor twee vectoren \vec{x} en \vec{y} in een Euclidische ruimte E geldt

$$\vec{x} \perp \vec{y} \implies \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit formule (6.5) □

Lemma 6.1.11. *Zij E een Euclidische ruimte. Een vector van E die loodrecht staat op alle vectoren van E moet noodzakelijk de nulvector zijn.*

Bewijs. Merk op dat voor elke $\vec{z} \in E$ geldt dat $\langle \vec{0}, \vec{z} \rangle = 0$ (waarom?) en pas lemma 6.1.7 toe. □

Gevolg 6.1.12. *Zij E een Euclidische ruimte. Een vector van E die loodrecht staat op alle vectoren van een basis van E moet noodzakelijk de nulvector zijn.*

Bewijs. Door de bilineariteit van het inwendig product staat zo een vector loodrecht op alle vectoren van E . Pas nu vorig lemma toe. □

6.2 Orthonormale basissen

We werken in een Euclidische ruimte E .

Definitie 6.2.1. *Een stel van nul verschillende vectoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots\}$ (eindig of aftelbaar) in een Euclidische ruimte E wordt **orthogonaal** genoemd indien $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ zodra $i \neq j$. We noemen het stel **orthonormaal** indien bovendien geldt dat $\|\vec{e}_i\| = 1$ voor elke i .*

Merk op dat een rij vectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \dots$ orthonormaal is als voor elke i en j geldt

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Stelling 6.2.2. *Een eindig stel niet-nulle orthogonale vectoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ is steeds lineair onafhankelijk.*

Bewijs. Onderstel dat

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

Neem het inwendig product met \vec{e}_i , voor een willekeurige i . Dan volgt

$$\alpha_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 0$$

en dus is $\alpha_i = 0$. □

Definitie 6.2.3. *Als een basis van E bestaat uit een stel orthogonale (orthonormale) vectoren, dan noemen we deze basis een **orthogonale (orthonormale) basis**.*

We zullen nu bewijzen dat elke eindigdimensionale Euclidische ruimte een orthonormale basis heeft. Een aftelbare rij vectoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \dots$ is per definitie **lineair onafhankelijk** als elke eindige deelrij lineair onafhankelijk is.

Stelling 6.2.4. (orthogonalisatieprocédé van Gram-Schmidt) *Onderstel dat*

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \dots$$

een eindig of aftelbaar stel lineair onafhankelijke vectoren is in een Euclidische ruimte E . Dan bestaat er een orthonormale rij vectoren

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \dots$$

zodat voor elke m geldt dat

$$\text{vect} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \} = \text{vect} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \} \quad (6.9)$$

Bewijs. We construeren eerst een rij orthogonale vectoren

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n, \dots$$

waarvoor (6.9) geldt. We doen dit per inductie op m .

$m = 1$: neem $\vec{b}_1 = \vec{x}_1$.

Onderstel nu dat $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m$ geconstrueerd zijn en voldoen aan (6.9), en schrijf

$$\vec{b}_{m+1} = \vec{x}_{m+1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{b}_i$$

Dan geldt dat

$$\begin{aligned} \text{vect} \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1} \} &= \text{vect} \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m, \vec{x}_{m+1} \} \\ &= \text{vect} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1} \} \end{aligned}$$

Hieruit volgt in het bijzonder dat $\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1} \}$ lineair onafhankelijk is, want de dimensie van de voortgebrachte ruimte is $m + 1$. Hieruit volgt ook dat $\vec{b}_{m+1} \neq \vec{0}$.

De coëfficiënten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ worden nu zo gekozen dat voor $j = 1, \dots, m$:

$$\vec{b}_{m+1} \perp \vec{b}_j$$

of

$$\langle \vec{b}_{m+1}, \vec{b}_j \rangle = \langle \vec{x}_{m+1}, \vec{b}_j \rangle + \alpha_j \langle \vec{b}_j, \vec{b}_j \rangle = 0$$

Het volstaat om

$$\alpha_j = - \frac{\langle \vec{x}_{m+1}, \vec{b}_j \rangle}{\langle \vec{b}_j, \vec{b}_j \rangle}$$

te kiezen.

Om de rij vectoren orthonormaal te maken stellen we tenslotte

$$\vec{e}_j = \frac{\vec{b}_j}{\|\vec{b}_j\|}$$

□

Gevolg 6.2.5. *Elke eindigdimensionale Euclidische ruimte heeft een orthonormale basis.*

Bewijs. We weten dat elke eindigdimensionale vectorruimte een basis heeft. Gebruik het Gram-Schmidt procédé om deze om te vormen tot een orthonormale basis. \square

Onderstel dat $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ een orthonormale basis is van een Euclidische ruimte E . Het inwendig product kan nu gemakkelijk uitgerekend worden: voor

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{e}_i$$

hebben we

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{e}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \end{aligned}$$

Gevolg 6.2.6. *Onderstel dat E een n -dimensionale Euclidische ruimte is. Dan bestaat er een isomorfisme $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dat het inwendig product in E omzet in het standaard inwendig product op \mathbb{R}^n .*

Bewijs. Neem een orthonormale basis van E , en neem voor f de afbeelding die een vector afbeeldt op de coördinaten ten opzichte van deze orthonormale basis. \square

Het orthogonaal complement van een deelruimte

Definitie 6.2.7. *Neem een Euclidische ruimte E , en $X \subset E$. De verzameling*

$$X^\perp = \{\vec{y} \in E \mid \forall \vec{x} \in X: \vec{y} \perp \vec{x}\}$$

*noemen we het **orthogonaal complement** van de verzameling X*

Stelling 6.2.8. X^\perp *is een deelruimte van E .*

Bewijs. Onderstel $\vec{y}, \vec{z} \in X^\perp$. Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en voor elke $\vec{x} \in X$ geldt dat

$$\langle \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}, \vec{x} \rangle = \alpha \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \beta \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle = 0$$

en dus is $\alpha \vec{y} + \beta \vec{z} \in X^\perp$. \square

Stelling 6.2.9. *Onderstel dat E een Euclidische ruimte is, en dat F een eindigdimensionale deelruimte is. Dan geldt*

$$E = F \oplus F^\perp$$

We zeggen dat E de orthogonale directe som is van F en F^\perp .

Bewijs. We moeten eerst bewijzen dat $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in F \cap F^\perp &\implies \vec{x} \perp \vec{x} \\ &\implies \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \\ &\implies \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

We zullen nu aantonen dat $E = F + F^\perp$. Uit stelling 6.2.5 weten we dat F een orthonormale basis $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$ heeft. Neem $\vec{x} \in E$ en stel

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^m \langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i \in F$$

en

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$$

Voor $j = 1, \dots, m$ hebben we nu dat

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}_j, \vec{z} \rangle &= \langle \vec{f}_j, \vec{x} \rangle - \sum_{i=1}^m \langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle \langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle \\ &= \langle \vec{f}_j, \vec{x} \rangle - \sum_{i=1}^m \langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle \delta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

zodat $\vec{z} \in F^\perp$. We hebben dus bewezen dat $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ met $\vec{y} \in F$ en $\vec{z} \in F^\perp$. □

We merken op (zonder bewijs) dat stelling 6.2.9 niet altijd geldig is indien F oneindigdimensionaal is.

Voor F eindigdimensionaal kunnen we de *projectie*

$$p: E \rightarrow F: \vec{x} \mapsto \sum_{i=1}^m \langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i$$

beschouwen. We noemen deze de **orthogonale projectie** van E op F . De **afstand** $d(\vec{x}, F)$ van $\vec{x} \in E$ tot F is per definitie

$$d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - p(\vec{x})\| \tag{6.10}$$

Laten we aantonen dat dit een zinnige definitie is:

Stelling 6.2.10. *Onderstel dat F een eindigdimensionale deelruimte is van een Euclidische ruimte E , en $\vec{x} \in E$. Dan is*

$$d(\vec{x}, F) = \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| : \vec{f} \in F\}$$

Bewijs. Neem $\vec{x} \in E$. Voor elke $\vec{f} \in F$ geldt:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{f}\|^2 &= \|\vec{x} - p(\vec{x}) + p(\vec{x}) - \vec{f}\|^2 \\ &= \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2 + \|p(\vec{x}) - \vec{f}\|^2 \\ &\geq \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2 \end{aligned}$$

Hierbij maakten we gebruik van de stelling van Pythagoras, gecombineerd met het feit dat

$$\vec{x} - p(\vec{x}) \perp p(\vec{x}) - \vec{f}$$

□

Voor een verzameling $X \subset E$ kunnen we het orthogonale complement van het orthogonale complement bekijken:

$$X^{\perp\perp} = (X^\perp)^\perp$$

Hiervoor geldt de volgende eigenschap.

Stelling 6.2.11. *Voor elke deelverzameling X van een Euclidische ruimte E geldt*

$$X \subset X^{\perp\perp}$$

Bewijs. Als $\vec{x} \in X$, dan geldt voor elke $\vec{y} \in X^\perp$ dat $\vec{x} \perp \vec{y}$ zodat $\vec{x} \in X^{\perp\perp}$. □

Stelling 6.2.12. *Als F een eindigdimensionale deelruimte is van een Euclidische ruimte E , dan is $F = F^{\perp\perp}$.*

Bewijs. We weten reeds dat $F \subset F^{\perp\perp}$. Neem $\vec{x} \in F^{\perp\perp}$, en schrijf

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

met $\vec{y} \in F$, $\vec{z} \in F^\perp$ (cf. stelling 6.2.9). Nu geldt

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$$

aangezien $\vec{z} \in F^\perp$ en $\vec{x} \in F^{\perp\perp}$. We hebben ook

$$\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$$

aangezien $\vec{y} \in F$ en $\vec{z} \in F^\perp$. Als we deze twee eigenschappen combineren vinden we dat

$$\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$$

en dus moet $\vec{z} = \vec{0}$. Maar dan is $\vec{x} = \vec{y} \in F$. □

6.3 Toegevoegde lineaire afbeeldingen

We nemen twee eindigdimensionale Euclidische ruimten, met orthonormale basissen

$$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \text{ voor } E$$

$$\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\} \text{ voor } F$$

De matrix $A = [f]_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}$ van een lineaire afbeelding $f : E \rightarrow F$ kan geschreven worden in termen van het inwendig product. Immers, voor elke $i \in \{1, \dots, n\}$ hebben we

$$f(\vec{e}_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} \vec{f}_k$$

en dus, voor elke $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$\langle f(\vec{e}_i), \vec{f}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m a_{ki} \vec{f}_k, \vec{f}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^m a_{ki} \delta_{kj} = a_{ji} \quad (6.11)$$

Deze formule is ondermeer nuttig in het bewijs van de volgende stelling:

Stelling 6.3.1. *Zij $f : E \rightarrow F$ een lineaire afbeelding tussen twee eindigdimensionale Euclidische ruimten E en F . Er bestaat dan een unieke lineaire afbeelding $f^\dagger : F \rightarrow E$ waarvoor geldt*

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^\dagger(\vec{y}) \rangle \quad (6.12)$$

voor elke $\vec{x} \in E$ en $\vec{y} \in F$. Als $A = [f]_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}$ de matrix is van f ten opzichte van twee orthonormale basissen \mathcal{E} en \mathcal{F} , dan is

$$[f^\dagger]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = A^t, \quad (6.13)$$

de getransponeerde van de matrix A . We noemen f^\dagger de **toegevoegde** van f .

Bewijs. We bewijzen eerst het bestaan van de afbeelding f^\dagger . Zoals hierboven nemen we orthonormale basissen voor E en F , en we definiëren f^\dagger door (6.13). Als we (6.11) toepassen op f^\dagger , dan vinden we

$$\langle f^\dagger(\vec{f}_j), \vec{e}_i \rangle = a_{ji} \quad (6.14)$$

en, als we (6.11) en (6.14) vergelijken:

$$\langle f(\vec{e}_i), \vec{f}_j \rangle = \langle \vec{e}_i, f^\dagger(\vec{f}_j) \rangle \quad (6.15)$$

(6.12) volgt nu gemakkelijk uit de lineariteit van f en f^\dagger : voor $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \in E$ en $\vec{y} = \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{f}_j \in F$ hebben we namelijk

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \langle f(\vec{e}_i), \vec{f}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \langle \vec{e}_i, f^\dagger(\vec{f}_j) \rangle \\ &= \langle \vec{x}, f^\dagger(\vec{y}) \rangle \end{aligned}$$

De uniciteit wordt bewezen als volgt: onderstel dat $f^\dagger : F \rightarrow E$ voldoet aan (6.12). Kies orthonormale basissen \mathcal{E} en \mathcal{F} , zoals hierboven. Uit (6.12) volgt onmiddellijk dat

$$\langle f(\vec{e}_i), \vec{f}_j \rangle = \langle \vec{e}_i, f^\dagger(\vec{f}_j) \rangle$$

en dus, als we (6.11) toepassen op f en f^\dagger :

$$[f^\dagger]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}^t$$

en de matrix van f^\dagger , en a fortiori f^\dagger , is dus volledig bepaald. □

Gevolg 6.3.2. Voor een lineaire afbeelding $f : E \rightarrow F$ hebben we

$$f^{\dagger\dagger} = f$$

Bewijs. Stel $[f]_{\mathcal{F}, \mathcal{E}} = A$. De matrix van $f^{\dagger\dagger}$ is dan $A^{tt} = A$, en het gestelde volgt. □

Een afbeelding $f : E \rightarrow E$ heet **zelftoegevoegd** indien $f = f^\dagger$. Uit stelling 6.3.1 volgt dat een lineaire afbeelding zelftoegevoegd is als de matrix van die lineaire afbeelding **symmetrisch** is, d.w.z. $a_{ij} = a_{ji}$ voor elk koppel indices i en j . Voor een zelftoegevoegde lineaire afbeelding f geldt dus dat

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$$

voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

6.4 Orthogonale lineaire afbeeldingen

Definitie 6.4.1. Een lineaire afbeelding $f : E \rightarrow E$ van een Euclidische ruimte naar zichzelf wordt **orthogonaal** genoemd als

$$\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

voor elke $\vec{x} \in E$.

Stelling 6.4.2. Een lineaire afbeelding $f : E \rightarrow E$ is orthogonaal als en alleen als

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

Bewijs. Een implicatie is triviaal, en de tweede volgt uit (6.7). □

Stelling 6.4.3. Een orthogonale lineaire afbeelding $f : E \rightarrow E$ is steeds injectief. Indien E eindig-dimensionaal is, dan is f bijectief.

Bewijs. Als $f(\vec{x}) = \vec{0}$, dan is $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| = 0$, en dus $\vec{x} = \vec{0}$. □

Vanaf nu beperken we ons tot de situatie waarin E eindigdimensionaal is. In dat geval is de inverse van de orthogonale lineaire afbeelding f gelijk aan de toegevoegde f^\dagger .

Stelling 6.4.4. *Onderstel $f : E \rightarrow E$ lineair, met E een eindigdimensionale Euclidische ruimte. Dan geldt*

$$f \text{ is orthogonaal} \iff f^\dagger \circ f = 1_E$$

Bewijs. Onderstel dat f orthogonaal is. Dan geldt voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in E$

$$\langle (f^\dagger \circ f)(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

zodat $f^\dagger \circ f = 1_E$.

Omgekeerd, indien $f^\dagger \circ f = 1_E$, dan hebben we voor elke $\vec{x}, \vec{y} \in E$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (f^\dagger \circ f)(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle$$

en dus is f orthogonaal. □

Gevolg 6.4.5. *Als $f : E \rightarrow E$ orthogonaal is, dan is ook f^\dagger orthogonaal.*

We kunnen orthogonale lineaire afbeeldingen ook nog karakteriseren met behulp van orthonormale basissen.

Stelling 6.4.6. *Een lineaire afbeelding $f : E \rightarrow E$ is orthogonaal als en alleen als f orthonormale basissen omzet in orthonormale basissen.*

Bewijs. Uit definitie 6.4.1 en stelling 6.4.2 volgt onmiddellijk dat f orthonormale basissen omzet in orthonormale basissen. Onderstel dat $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ een orthonormale basis is van E , en dat ook $\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ een orthonormale basis is. Neem $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \in E$. Dan is

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\vec{e}_i) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

en dus is f orthogonaal. □

Een vierkante matrix A wordt een **orthogonale matrix** genoemd als de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : X \mapsto AX$, waarbij \mathbb{R}^n uitgerust is met het standaard inwendig product, orthogonaal is. Uit 6.4.4, 6.4.5 en 6.4.6 volgt nu onmiddellijk:

Gevolg 6.4.7. *Voor een $n \times n$ -matrix A zijn volgende eigenschappen equivalent.*

1. A is orthogonaal;

2. $A^{-1} = A^t$;
3. de kolommen van A vormen een orthonormale basis van \mathbb{R}^n ;
4. de rijen van A vormen een orthonormale basis van \mathbb{R}^n .

\mathbb{R}^n is hier uitgerust met het standaard inwendig product.

Gevolg 6.4.8. Voor een orthogonale matrix A geldt dat $\det(A) = \pm 1$.

Bewijs. $1 = \det(AA^t) = \det(A) \det(A^t) = \det(A)^2$. □

Voorbeelden 6.4.9. De matrices

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

zijn orthogonaal.

Orthogonale transformaties van \mathbb{R}

Onderstel dat

$$A = (a) \in M_{11}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

orthogonaal is. Uit 6.4.7 volgt dat $\{a\}$ een orthonormale basis van \mathbb{R} moet zijn, en dus is $a = \pm 1$. Er zijn dus juist twee orthogonale transformaties van \mathbb{R} . Stel nu

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid ax = x\}$$

V is de verzameling der **dekpunten** (of **fixpunten**) van de orthogonale transformatie met matrix A , en V is een deelruimte van \mathbb{R} . Als $a = 1$, dan is $V = \mathbb{R}$, en $\dim(V) = 1$. Als $a = -1$, dan is $V = \{0\}$, en $\dim(V) = 0$.

Orthogonale transformaties van \mathbb{R}^2

Onderstel dat

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$$

orthogonaal is. Uit 6.4.7 volgt dat

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

een orthonormale basis is. Dus is

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ en } c^2 + d^2 = 1$$

en we kunnen schrijven

$$a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta, \quad c = \sin \psi, \quad d = \cos \psi$$

Uit de orthogonaliteit van de twee kolommen volgt

$$ac + bd = \cos \theta \sin \psi + \sin \theta \cos \psi = \sin(\theta + \psi) = 0$$

en dus is $\theta + \psi = 0$ of $\theta + \psi = \pi$.

Eerste geval : $\psi = -\theta$. In dit geval is

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

de matrix van een rotatie rond de oorsprong over de hoek θ . Merk op dat in dit geval $\det(A) = 1$.

Tweede geval : $\psi = \pi - \theta$. In dit geval is

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

de matrix van de orthogonale spiegeling ten opzichte van de rechte door de oorsprong die een hoek $\theta/2$ insluit met de x -as. Merk op dat in dit geval $\det(A) = -1$.

We kunnen de orthogonale transformaties ook klasseren volgens de dimensie van de ruimte der dekpunten V . Als A een rotatie voorstelt om een hoek $\theta \neq 0$, dan is $\dim(V) = 0$. Als A een spiegeling voorstelt, dan is $\dim(V) = 1$. Als A de eenheidsmatrix is (d.i. een rotatie over hoek 0), dan is $\dim(V) = 2$.

Stelling 6.4.10. *Er zijn twee soorten orthogonale transformaties van \mathbb{R}^2 : rotaties rond de oorsprong (deze hebben determinant 1), en spiegelingen ten opzichte van rechten door de oorsprong (deze hebben determinant -1).*

Orthogonale transformaties van \mathbb{R}^3

Beschouw een orthogonale lineaire afbeelding $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, en neem

$$V = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) = X\}$$

V is de deelruimte behorende bij de eigenwaarde 1, of nog, V is de verzameling van de dekpunten van de lineaire transformatie f . Er zijn nu vier mogelijke gevallen: $\dim V = 0, 1, 2$ of 3.

Eerste geval : $\dim V = 3$. Dan is f de identiteit, en $A = I_3$. In dit geval is $\det(f) = 1$.

Tweede geval : $\dim V = 2$. Neem een orthonormale basis $\{F_1, F_2\}$ van V . Vul deze aan tot een basis $\{F_1, F_2, F_3\}$ van \mathbb{R}^3 , en zet deze met behulp van het Gram-Schmidt procédé om tot een orthonormale basis $\{F_1, F_2, F_3\}$. Dan staat $f(F_3)$ loodrecht op $f(F_1) = F_1$ en $f(F_2) = F_2$. Dus moet $f(F_3) = \lambda F_3$, en aangezien $\|f(F_3)\| = \|F_3\| = 1$ is $\lambda = \pm 1$. $\lambda = 1$ is onmogelijk, want F_3 is geen dekpunt, en dus is $f(F_3) = -F_3$. De matrix van f ten opzichte van de basis $\{F_1, F_2, F_3\}$ is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en f is de orthogonale spiegeling ten opzichte van het vlak door F_1 en F_2 . In dit geval is $\det(f) = -1$.

Derde geval : $\dim V = 1$. Stel $V = \text{vect}\{F_1\}$, met $\|F_1\| = 1$. Vul $\{F_1\}$ aan tot een orthonormale basis $\{F_1, F_2, F_3\}$ van \mathbb{R}^3 . Stel $W = \text{vect}\{F_2\} \oplus \text{vect}\{F_3\}$. Omdat $f(F_2) \perp f(F_1) = F_1$, is $f(F_2) \in W$. Op dezelfde manier volgt dat $f(F_3) \in W$, en dus is de beperking van f tot W een orthogonale transformatie van W :

$$f|_W : W \rightarrow W$$

$f|_W$ heeft bij onderstelling slechts één dekpunt, de oorsprong, en dus is $f|_W$ een rotatie in het F_2 - F_3 -vlak rond de oorsprong over een hoek θ . De matrix van f ten opzichte van de basis $\{F_1, F_2, F_3\}$ is nu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

f is dus een rotatie rond de as $\text{vect}\{F_1\}$. In dit geval is $\det(f) = 1$.

Vierde geval : $\dim V = 0$. f heeft dus geen niet-triviale dekpunten. De karakteristieke veelterm P_f van f is van graad 3, en heeft dus minstens een reëel nulpunt. f heeft dus een eigenvector F_1 met een reële eigenwaarde λ .

$$f(F_1) = \lambda F_1$$

Omdat $\|f(F_1)\| = \|F_1\|$ moet $|\lambda| = 1$. $\lambda = 1$ is niet mogelijk, want f heeft geen niet-triviale dekpunten, en dus is $\lambda = -1$, en

$$f(F_1) = -F_1$$

Zorg ervoor dat F_1 lengte 1 heeft, en vul $\{F_1\}$ aan tot een orthonormale basis $\{F_1, F_2, F_3\}$ van \mathbb{R}^3 . Stel $W = \text{vect}\{F_2\} \oplus \text{vect}\{F_3\}$. Net zoals in het vorige geval is de beperking $f|_W$ een orthogonale transformatie van W zonder dekpunten. $f|_W$ is dus een rotatie in het F_2 - F_3 -vlak rond de oorsprong over een hoek θ . De matrix van f ten opzichte van de basis $\{F_1, F_2, F_3\}$ is nu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

f is dus een rotatie rond de as vect $\{F_1\}$, gevolgd door een spiegeling om het vlak door F_2 en F_3 . In dit geval is $\det(f) = -1$.

In de volgende stelling vatten we onze resultaten samen:

Stelling 6.4.11. *Onderstel dat $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ een orthogonale transformatie is, en neem voor V de verzameling van de dekpunten van f . Er zijn dan vier mogelijkheden.*

1. $\dim V = 3$. Dan is f de identieke afbeelding.
2. $\dim V = 2$. Dan is f de orthogonale spiegeling ten opzichte van een vlak door de oorsprong.
3. $\dim V = 1$. Dan is f een rotatie rond een rechte door de oorsprong.
4. $\dim V = 0$. Dan is f een rotatie rond een rechte door de oorsprong, gevolgd door de spiegeling ten opzichte van het vlak door de oorsprong loodrecht op deze rechte.

6.5 Volume en vectorieel product

Georiënteerde Euclidische ruimten

Onderstel dat E een eindigdimensionale ruimte is. Kies een vaste orthonormale basis

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

van E . In het vervolg zal de volgorde van de basisvectoren een rol spelen. We noemen een basis $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ **positief georiënteerd** indien de overgangsmatrix bij overgang van basis B naar basis A een positieve determinant heeft. Indien deze determinant negatief is, dan noemen we A een **negatief georiënteerde basis**. De ruimte E wordt georiënteerd door het vastleggen van een positief georiënteerde basis.

In \mathbb{R}^2 kiest men de positieve basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ gewoonlijk als volgt: als men de vector \vec{e}_1 op de kortst mogelijk manier draait tot in \vec{e}_2 , dan draait men in tegenwijzerzin.

In \mathbb{R}^3 is de conventie de volgende: als men de duim van een rechterhand in de \vec{e}_1 -richting laat wijzen, en de wijsvinger in de \vec{e}_2 -richting, dan wijst de middelvinger in de \vec{e}_3 -richting. Deze regel staat bekend als de **rechterhandregel**.

Merk op dat de oriëntatie van een basis verandert als men twee vectoren van de basis met elkaar verwisselt.

Het georiënteerde volume in een Euclidische ruimte

Neem twee vectoren (a, b) en (c, d) in \mathbb{R}^2 . Het is welbekend dat de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door deze twee vectoren gegeven wordt door de formule

$$\pm S = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

We veralgemenen (6.16) formeel tot n -dimensionale Euclidische ruimten, en komen zo tot de volgende definitie.

Definitie 6.5.1. *Onderstel dat $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vectoren zijn in een n -dimensionale georiënteerde vectorruimte E . Als*

$$(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$$

de coördinaten zijn van \vec{a}_i ten opzichte van een positief georiënteerde orthonormale basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, dan noemen we

$$\text{vol}_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*het **georiënteerd volume** van het hyperparallelepipedum opgespannen door de vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.*

Is dit wel een goede definitie? Eerst zullen we aantonen dat de definitie onafhankelijk is van de gekozen georiënteerde basis B , en daarna zullen we aantonen dat de definitie overeenstemt met ons intuïtief idee over oppervlakte en volume.

Stelling 6.5.2. *Definitie 6.5.1 is onafhankelijk van de keuze van de georiënteerde orthonormale basis B van E .*

Bewijs. Onderstel dat $C = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ een andere positief georiënteerde basis van E is, en dat M de overgangsmatrix bij overgang van de basis B naar de basis C is. Omdat B en C orthonormale basissen zijn, is M een orthogonale matrix, zodat $\det(M) = \pm 1$. Omdat B en C allebei positief georiënteerd zijn, is $\det(M) = 1$. Uit hoofdstuk 2 weten we dat

$$A'_i = [\vec{a}_i]_C = M[\vec{a}_i]_B = MA_i$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \det(A'_1 \ A'_2 \ \cdots \ A'_n) &= \det(MA_1 \ MA_2 \ \cdots \ MA_n) \\ &= \det(M) \det(A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n) \\ &= \det(A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n) \end{aligned}$$

en dit is net wat we wilden bewijzen. □

We zullen nu aantonen dat definitie 6.5.1 overeenstemt met ons intuïtief idee over oppervlakte en volume. Herhaal uit het lager onderwijs dat de oppervlakte van een parallellogram het product is van de basis en de hoogte van het parallellogram. We kunnen deze formule herschrijven als volgt: onderstel dat het parallellogram wordt opgespannen door de vectoren \vec{a} en \vec{b} , en beschouw \vec{a} als de basis van het parallellogram. De hoogte is dan niets anders dan de afstand $d(\vec{b}, V)$ van \vec{b} tot de

vectorruimte V voortgebracht door de vector \vec{a} .

Een analoge eigenschap geldt voor het volume van een parallellepipedum opgespannen door drie vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$: het volume is de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de vectoren \vec{a} en \vec{b} en de hoogte van het parallellepipedum. De hoogte van het parallellepipedum is in feite de afstand $d(\vec{c}, V)$ van \vec{c} tot de vectorruimte V voortgebracht door de vectoren \vec{a} en \vec{b} .

We zullen nu aantonen dat deze eigenschap volgt uit definitie 6.5.1.

Stelling 6.5.3. *Beschouw een n -tal vectoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ in een n -dimensionale Euclidische ruimte E , en stel $V = \text{vect}\{\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$. Dan geldt dat*

$$|\text{vol}_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)| = d(\vec{a}_1, V) |\text{vol}_{n-1}(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n)|$$

Bewijs. Als de vectoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ lineair afhankelijk zijn, dan zijn beide leden nul, en is de stelling bewezen (ga dit zelf na). We kunnen dus onderstellen dat $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ een basis van E is, en $\{\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$ een basis van V . Uit stelling 6.5.2 volgt dat we vrij een positief georiënteerde basis van E mogen kiezen om volumes te berekenen. We doen dit als volgt: neem een orthonormale basis $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ van V , en vul deze aan tot een positief georiënteerde orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ van E . Dan hebben we, met dezelfde notaties als hierboven voor de coördinaten van de vectoren \vec{a}_i :

$$d(\vec{a}_1, V) = |a_{11}|$$

De \vec{e}_1 -componenten van de vectoren $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ zijn nul, zodat

$$\begin{aligned} |\text{vol}_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |a_{11}| \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= d(\vec{a}_1, V) |\text{vol}_{n-1}(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n)| \end{aligned}$$

□

De determinant krijgt dus nu een meetkundige betekenis: bekijk de kolommen van de matrix A als vectoren in \mathbb{R}^n met de standaardbasis als positief georiënteerde basis. De determinant van A is dan het volume van het hyperparallellepipedum opgespannen door de kolommen van A vermenigvuldigd met plus of min 1 alnaargelang de kolommen van A een positief of negatief georiënteerde basis van \mathbb{R}^n vormen; indien $\text{rg}(A) < n$, dan is de determinant 0 en is er geen discussie over het teken.

Het vectorieel product

We werken nu in een driedimensionale georiënteerde Euclidische ruimte E . Neem een positief georiënteerde orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Definitie 6.5.4. *Het vectorieel product van twee vectoren $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ en $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ is de vector*

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (6.17)$$

Formule (6.17) moet als volgt gelezen worden: vergeet even dat er vectoren in de determinant staan, ontwikkel de determinant naar de eerste rij, en interpreteer dan opnieuw de elementen van de eerste rij in de determinant als de drie basisvectoren. (6.17) kan dus herschreven worden als volgt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \quad (6.18)$$

Formule (6.17) is natuurlijk gemakkelijker om te onthouden. Als $\vec{a} \parallel \vec{b}$, dan is $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Indien \vec{a} en \vec{b} niet evenwijdig zijn, dan hebben we volgende eigenschap.

Stelling 6.5.5. *Onderstel dat de vectoren \vec{a} en \vec{b} niet evenwijdig zijn. Het vectorieel product $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ is de unieke vector met de volgende eigenschappen:*

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$ en $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. $\|\vec{c}\|$ is de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door \vec{a} en \vec{b} ;
3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ is een positief georiënteerde basis van E .

Bewijs. We schrijven

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

Dan is

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

zodat $\vec{c} \perp \vec{a}$. Op dezelfde manier zien we dat $\vec{c} \perp \vec{b}$, en dit bewijst de eerste uitspraak. Laten we nu aantonen dat

$$|\text{Opp}(\vec{a}, \vec{b})| = \|\vec{c}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

De vector

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{c}\|} \vec{c}$$

is een eenheidsvector die loodrecht staat op het parallellogram dat opgespannen wordt door \vec{a} en \vec{b} . Dus is

$$\begin{aligned} |\text{Opp}(\vec{a}, \vec{b})| &= |\text{Vol}(\vec{u}, \vec{a}, \vec{b})| \\ &= \frac{1}{\|\vec{c}\|} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\vec{c}\|} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \\ &= \|\vec{c}\| \end{aligned}$$

Dit bewijst onze tweede uitspraak. We hebben ook dat

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 > 0$$

zodat $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ een positief georiënteerde basis is. □

Hoofdstuk 7

Prehilbertruimten

7.1 Prehilbertruimten

Hilbert inwendige producten

In dit hoofdstuk zijn alle vectorruimten *complexe* vectorruimten. Om de gedachten te vestigen bekijken we \mathbb{C} als vectorruimte over zichzelf. Laten we trachten om een inwendig product

$$b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

te definiëren. Het ligt voor de hand om volgende formule te proberen:

$$b(z_1, z_2) = z_1 z_2 \tag{7.1}$$

Dit werkt echter niet, omdat $b(z, z)$ niet noodzakelijk een positief reëel getal is. Met deze definitie kunnen we dus niet de lengte van een complex getal definiëren. Daarom passen we de definitie een beetje aan: we schrijven

$$b(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2 \tag{7.2}$$

Herinner dat het complex toegevoegde \bar{z} van een complex getal $z = x + iy$ gegeven wordt door de formule $\bar{z} = x - iy$. We krijgen dus dat

$$b(z, z) = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 > 0$$

als $z \neq 0$. Merk op dat het inwendig product gegeven door de formule (7.2) niet bilineair en niet symmetrisch is. Wel hebben we de eigenschappen

$$b(z_1, z_2) = \overline{b(z_2, z_1)}$$

en

$$\begin{aligned} b(\alpha z_1, z_2) &= \alpha b(z_1, z_2) \\ b(z_1, \alpha z_2) &= \bar{\alpha} b(z_1, z_2) \end{aligned}$$

We inspireren ons hierop bij de volgende definitie:

Definitie 7.1.1. *Neem een complexe vectorruimte H . Een afbeelding*

$$b: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$

*wordt een **Hilbert inwendig product** genoemd indien b volgende eigenschappen bezit:*

1. b is *sesquilineair*

$$\begin{aligned} b(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= \alpha b(\vec{x}, \vec{z}) + \beta b(\vec{y}, \vec{z}) \\ b(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) &= \overline{\alpha} b(\vec{x}, \vec{y}) + \overline{\beta} b(\vec{x}, \vec{z}) \end{aligned} \quad (7.3)$$

voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ en $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in H$;

2. b is *toegevoegd symmetrisch*

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{b(\vec{y}, \vec{x})} \quad (7.4)$$

voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in H$;

3. b is *positief definitief*

$$\vec{x} \neq \vec{0} \implies b(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}_0^+ \quad (7.5)$$

Net zoals in het voorgaand hoofdstuk zullen we dikwijls volgende notatie gebruiken:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

*Een complexe vectorruimte E die uitgerust is met een Hilbert inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wordt een **prehilbertruimte** genoemd.*

Voorbeeld 7.1.2. *Neem $H = \mathbb{C}^n$, en definieer een Hilbert inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als volgt:*

$$\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = \sum_{i=1}^n w_i \bar{z}_i$$

*voor $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. We noemen dit het **standaard inwendig product** op \mathbb{C}^n .*

De norm van een vector en de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

Definitie 7.1.3. *Beschouw een prehilbertruimte H . De **lengte** of **norm** van $\vec{z} \in H$ wordt gedefinieerd door de formule*

$$\|\vec{z}\| = \sqrt{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle}$$

*De **afstand** tussen de vectoren \vec{w} en \vec{z} wordt gegeven door de formule*

$$d(\vec{w}, \vec{z}) = \|\vec{w} - \vec{z}\|$$

De meeste eigenschappen uit het voorgaand hoofdstuk kunnen veralgemeend worden tot prehilbertruimten. We behandelen enkele van deze eigenschappen

Stelling 7.1.4. (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz)

Voor elk koppel vectoren \vec{w}, \vec{z} in een prehilbertruimte H geldt dat

$$|\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle| \leq \|\vec{w}\| \|\vec{z}\| \quad (7.6)$$

Bewijs. Als $\vec{w} = \vec{0}$ of $\vec{z} = \vec{0}$ dan is de formule triviaal. We kunnen dus onderstellen dat beide vectoren verschillend van nul zijn. Voor elke $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ geldt dat

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha \vec{w} - \beta \vec{z}, \alpha \vec{w} - \beta \vec{z} \rangle \\ &= \alpha \bar{\alpha} \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \alpha \bar{\beta} \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle - \bar{\alpha} \beta \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle + \beta \bar{\beta} \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \end{aligned}$$

Neem nu

$$\alpha = \|\vec{z}\|^2 \text{ en } \beta = \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$$

dan volgt dat

$$\|\vec{z}\|^4 \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{z}\|^2 \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle - \|\vec{z}\|^2 \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle + \|\vec{z}\|^2 \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle \geq 0$$

en

$$|\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle|^2 \leq \|\vec{w}\|^2 \|\vec{z}\|^2$$

□

Stelling 7.1.5. *Neem een prehilbertruimte H . De norm $\|\cdot\|$ voldoet aan de volgende eigenschappen, voor alle $\vec{w}, \vec{z} \in H$ en $\alpha \in \mathbb{C}$.*

1. $\|\vec{z}\| = 0 \iff \vec{z} = \vec{0}$;
2. $\|\alpha \vec{z}\| = |\alpha| \|\vec{z}\|$;
3. $\|\vec{w} + \vec{z}\| \leq \|\vec{w}\| + \|\vec{z}\|$.

Een prehilbertruimte is dus een genormeerde ruimte.

Bewijs. Oefening.

□

Orthonormale basissen

We werken in een prehilbertruimte H . Twee vectoren \vec{w} en \vec{z} worden **orthogonaal** genoemd als hun inwendig product $\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = 0$. Een stel van nul verschillende vectoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots\}$ (eindig of aftelbaar) wordt **orthogonaal** genoemd indien $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ zodra $i \neq j$. We noemen het stel orthonormaal indien bovendien geldt dat $\|\vec{e}_i\| = 1$ voor elke i . Een eindig stel orthogonale vectoren is steeds lineair onafhankelijk. Een basis van H die bestaat uit een stel orthogonale (orthonormale) vectoren wordt een **orthogonale (orthonormale) basis** genoemd.

Stelling 7.1.6. Het orthogonalisatieprocédé van Gram-Schmidt *Onderstel dat*

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \dots$$

een eindig of aftelbaar stel lineair onafhankelijke vectoren is in een prehilbertruimte H . Dan bestaat er een orthonormale rij vectoren

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \dots$$

zodat voor elke m geldt dat

$$\text{vect} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \} = \text{vect} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \}$$

Bewijs. Het bewijs is volledig hetzelfde als het bewijs van stelling 6.2.4. □

Gevolg 7.1.7. *Elke eindigdimensionale prehilbertruimte heeft een orthonormale basis.*

Het orthogonaal complement van een deelverzameling

Neem een prehilbertruimte H , en $X \subset H$. De verzameling

$$X^\perp = \{ \vec{y} \in H \mid \forall \vec{x} \in X: \vec{y} \perp \vec{x} \}$$

noemen we het **orthogonaal complement** van de verzameling X . Net zoals in het voorgaand hoofdstuk kunnen we gemakkelijk bewijzen dat X^\perp een deelruimte van H is.

Stelling 7.1.8. *Onderstel dat H een prehilbertruimte is, en dat F een eindigdimensionale deelruimte is. Dan geldt*

$$H = F \oplus F^\perp$$

*We zeggen dat H de **orthogonale directe som** is van F en F^\perp .*

Bewijs. Het bewijs is analoog met het bewijs van stelling 6.2.9. Verifieer zelf de details. □

7.2 Hermitische en unitaire lineaire afbeeldingen

De hermitsch toegevoegde van een lineaire afbeelding

We nemen twee eindigdimensionale prehilbertruimten, met orthonormale basissen

$$\mathcal{E} = \{ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \} \text{ voor } H$$

$$\mathcal{F} = \{ \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m \} \text{ voor } K$$

Voor een lineaire afbeelding $f : H \rightarrow K$ met matrix $A = [f]_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}$ geldt, net zoals in het Euclidisch geval (zie (6.11)):

$$\langle f(\vec{e}_i), \vec{f}_j \rangle = a_{ji} \tag{7.7}$$

Stelling 7.2.1. Zij $f : H \rightarrow K$ een lineaire afbeelding tussen twee eindigdimensionale Prehilbertruimten H en K . Er bestaat dan een unieke lineaire afbeelding $f^\dagger : K \rightarrow H$ waarvoor geldt

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^\dagger(\vec{y}) \rangle \quad (7.8)$$

voor elke $\vec{x} \in H$ en $\vec{y} \in K$. Als $A = [f]_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}$ de matrix is van f tenopzichte van twee orthonormale basissen \mathcal{E} en \mathcal{F} , dan is

$$[f^\dagger]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \overline{A}^t \quad (7.9)$$

de complex toegevoegde van de getransponeerde van de matrix A . We noemen f^\dagger de **hermitisch toegevoegde** van f .

Bewijs. Het bewijs verloopt analoog aan dat van stelling 6.3.1. We definiëren $f^\dagger : K \rightarrow H$ door (7.9). Als we (7.7) toepassen op f en f^\dagger , vinden we

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{e}_i), \vec{f}_j \rangle &= a_{ji} \\ \langle f^\dagger(\vec{f}_j), \vec{e}_i \rangle &= \overline{a_{ji}} \\ \langle \vec{e}_i, f^\dagger(\vec{f}_j) \rangle &= a_{ji} \end{aligned}$$

en dus

$$\langle f(\vec{e}_i), \vec{f}_j \rangle = \langle \vec{e}_i, f^\dagger(\vec{f}_j) \rangle$$

De rest van het bewijs is identiek aan dat van stelling 6.3.1. □

We noteren vanaf nu $A^\dagger = \overline{A}^t$ voor een matrix A . Merk op dat $A^{\dagger\dagger} = A$, en dus ook $f^{\dagger\dagger} = f$, voor elke lineaire afbeelding f .

Hermitische lineaire afbeeldingen

Een afbeelding $f : H \rightarrow H$ heet **hermitisch** indien $f = f^\dagger$. Uit stelling 7.2.1 volgt dat een lineaire afbeelding hermitisch is als de matrix van die lineaire afbeelding **hermitisch** is, d.w.z. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ voor elk koppel indices i en j .

Unitaire lineaire afbeeldingen

Een unitaire lineaire afbeelding tussen prehilbertruimten wordt gedefinieerd zoals een orthogonale lineaire afbeelding tussen Euclidische ruimten.

Definitie 7.2.2. Een lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ van een prehilbertruimte naar zichzelf wordt **unitair** genoemd als

$$\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

voor elke $\vec{x} \in H$.

Unitaire lineaire afbeeldingen hebben dezelfde eigenschappen als orthogonale lineaire afbeeldingen, en ook de bewijzen zijn nagenoeg identiek. We sommen hierna de voornaamste eigenschappen op, en laten de details aan de lezer.

Stelling 7.2.3. *Een lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ is unitair als en alleen als*

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Een unitaire afbeelding is steeds injectief, en ze is steeds bijjectief als H eindigdimensionaal is.

Stelling 7.2.4. *Onderstel dat H een eindigdimensionale prehilbertruimte, en $f : H \rightarrow H$ lineair. Dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

1. f is unitair;
2. f is bijjectief en $f^{-1} = f^\dagger$;
3. f^\dagger is unitair;
4. f zet orthonormale basissen van H om in orthonormale basissen.

Een vierkante complexe matrix A wordt een **unitaire matrix** genoemd als de lineaire afbeelding $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : Z \mapsto AZ$, waarbij \mathbb{C}^n uitgerust is met het standaard inwendig product, unitair is. Uit de voorgaande stellingen volgt nu onmiddellijk:

Gevolg 7.2.5. *Voor een complexe $n \times n$ -matrix A zijn volgende eigenschappen equivalent.*

1. A is unitair;
2. $A^{-1} = A^\dagger$;
3. de kolommen van A vormen een orthonormale basis van \mathbb{C}^n ;
4. de rijen van A vormen een orthonormale basis van \mathbb{C}^n .

\mathbb{C}^n is hier uitgerust met het standaard inwendig product.

Gevolg 7.2.6. *Voor een unitaire matrix A geldt dat $\det(A) = e^{i\theta}$. De determinant van een unitaire matrix A ligt dus op de eenheidscirkel in het complexe vlak.*

Bewijs. Onderstel dat $\det(A) = re^{i\theta}$. Dan is

$$\det(A^\dagger) = re^{-i\theta}$$

en

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

zodat $r = 1/r$ en $r = 1$. Dus is $\det(A) = e^{i\theta}$. □

7.3 Diagonalisatie van hermitische en unitaire lineaire afbeeldingen

Diagonalisatie van hermitische lineaire afbeeldingen

In het hoofdstuk eigenwaarden en eigenvectoren hebben we al vermeld dat elke symmetrische reële matrix kan gediagonaliseerd worden. We zullen dit nu bewijzen. In het vervolg is H een eindigdimensionale prehilbertruimte, en $f : H \rightarrow H$ een hermitische lineaire afbeelding. f heeft dus volgende eigenschap

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle \quad (7.10)$$

voor elke $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Vooraleer we het belangrijkste resultaat uit deze paragraaf, stelling 7.3.3, bewijzen, hebben we eerst enkele lemma's nodig.

Lemma 7.3.1. *Alle eigenwaarden van een hermitische lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ zijn reëel.*

Bewijs. Onderstel dat λ een eigenwaarde is van f , en dat \vec{v} een bijhorende eigenvector is. Gebruik makend van (7.10) en het feit dat $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ vinden we

$$\begin{aligned} \lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &= \langle \lambda\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{v}), \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

Omdat $\vec{v} \neq \vec{0}$ volgt hieruit dat $\lambda = \bar{\lambda}$ en dus is $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Lemma 7.3.2. *Beschouw een hermitische lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ en onderstel dat een deelruimte V van H invariant is onder f , dit wil zeggen dat $f(V) \subset V$. Dan is ook het orthogonaal complement V^\perp invariant onder f , m.a.w. $f(V^\perp) \subset V^\perp$.*

Bewijs. Neem $\vec{y} \in V^\perp$. Dan geldt voor elke $\vec{x} \in V$ dat

$$\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = 0$$

aangezien $f(\vec{x}) \in V$ en $\vec{y} \in V^\perp$. Hieruit volgt dat $f(\vec{y}) \in V^\perp$, en dit bewijst het lemma. □

Stelling 7.3.3. *Voor elke hermitische lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ bestaat een orthonormale basis B van eigenvectoren van f . Tenopzichte van deze basis is de matrix van f een reële diagonaalmatrix.*

Bewijs. We zullen de stelling bewijzen per inductie op de dimensie van H . Voor $\dim(H) = 1$ is de stelling triviaal.

Onderstel dat de stelling waar is voor $\dim(H) < n$. Beschouw een n -dimensionale prehilbertruimte H , en een hermitische afbeelding $f : H \rightarrow H$. Uit lemma 7.3.1 volgt dat de karakteristieke veelterm P_f enkel reële wortels heeft. Neem één van deze wortels λ , en neem een bijhorende eigenvector \vec{e}_1 . Kies \vec{e}_1 zo dat $\|\vec{e}_1\| = 1$. Stel $V = \mathbb{C}\vec{e}_1$. Omdat $f(\vec{e}_1) = \lambda\vec{e}_1$ is $f(V) \subset V$, en dus ook $f(V^\perp) \subset V^\perp$ (cf. lemma 7.3.2). Bekijk de afbeelding

$$g = f|_{V^\perp} : V^\perp \rightarrow V^\perp$$

Omdat $\dim(V^\perp) = n - 1$ bestaat vanwege de inductiehypothese een orthonormale basis $\{\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ van V^\perp bestaande uit eigenvectoren van g . $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ zijn duidelijk ook eigenvectoren van f , en \vec{e}_1 staat loodrecht op elk van de overige \vec{e}_i (omdat $\vec{e}_1 \in V$ en $\vec{e}_j \in V^\perp$). $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ is dus een orthonormale basis van eigenvectoren van f . \square

Gevolg 7.3.4. *Voor elke complexe hermitische matrix A bestaat een unitaire matrix M zodat $M^\dagger A M = D$ een reële diagonaalmatrix is.*

Bewijs. Uit stelling 7.3.3 weten we dat de matrix van de lineaire hermitische afbeelding $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ gegeven door linksvermenigvuldiging met A tenopzichte van een zekere orthonormale basis van \mathbb{C}^n een reële diagonaalmatrix is. De overgangsmatrix M is een unitaire matrix, en $M^\dagger = M^{-1}$. De eigenschap volgt dan uit de overgangsformules. \square

Bovenstaande resultaten gelden — mutatis mutandis — ook voor zelftoegevoegde lineaire afbeeldingen van een eindigdimensionale Euclidische ruimte naar zichzelf. Bewijs zelf volgende stelling.

Stelling 7.3.5. *Onderstel dat E een eindigdimensionale Euclidische ruimte is, en dat $f : E \rightarrow E$ een zelftoegevoegde lineaire afbeelding.*

- alle eigenwaarden van f zijn reëel;
- als een deelruimte V van E invariant is onder f , dan is ook het orthogonaal complement V^\perp invariant;
- er bestaat een orthonormale basis van E bestaande uit eigenvectoren van f .

Voor elke reële symmetrische matrix A bestaat een orthogonale matrix M zodat $M^t A M = D$ een reële diagonaalmatrix is.

Diagonalisatie van commuterende hermitische afbeeldingen

Onderstel dat V een eindigdimensionale vectorruimte is, en dat $f, g : V \rightarrow V$ twee lineaire afbeeldingen zijn. We stellen onszelf nu de volgende vraag: kunnen f en g *gelijktijdig* gediagonaliseerd worden, m.a.w., bestaat er een basis van V tenopzichte waarvan zowel de matrices van f als van g diagonaal worden? Uit de volgende stelling blijkt dat een nodige voorwaarde hiervoor is dat f en g commuteren.

Stelling 7.3.6. *Onderstel dat V een eindigdimensionale reële of complexe vectorruimte is. Indien er een basis E van V bestaat ten opzichte waarvan de matrices van f en g diagonaalmatrices zijn, dan commuteren f en g , d.w.z.*

$$f \circ g = g \circ f$$

Bewijs. Onderstel dat $[f]_{E,E} = D_1$ en $[g]_{E,E} = D_2$ diagonaalmatrices zijn. Omdat diagonaalmatrices steeds commuteren (ga dit zelf na) hebben we

$$[g \circ f]_{E,E} = D_2 D_1 = D_1 D_2 = [f \circ g]_{E,E}$$

en dus

$$g \circ f = f \circ g$$

□

Wanneer geldt ook de omgekeerde van stelling 7.3.6, m.a.w. wanneer kunnen commuterende lineaire afbeeldingen samen gediagonaliseerd worden? In de volgende stelling zullen we bewijzen dat commuterende hermitische lineaire afbeeldingen in een prehilbertruimte tezamen kunnen gediagonaliseerd worden.

Stelling 7.3.7. *Onderstel dat H een eindigdimensionale prehilbertruimte is, en dat $f, g : H \rightarrow H$ twee commuterende hermitische lineaire afbeeldingen zijn. Dan bestaat er een orthonormale basis van H waarin zowel de matrices van f als g reële diagonaalmatrices zijn.*

Als A_1 en A_2 twee commuterende complexe hermitische matrices zijn, dan bestaat er een unitaire matrix M zodanig dat

$$M^\dagger A_1 M = D_1 \text{ en } M^\dagger A_2 M = D_2$$

reële diagonaalmatrices zijn.

Bewijs. We bewijzen de stelling per inductie op $\dim(H)$. Voor $\dim(H) = 1$ is de stelling triviaal. Onderstel dat de stelling waar is voor $\dim(H) < n$.

Onderstel dat $\dim(H) = n$, en neem een eigenwaarde λ van f . We weten dat $\lambda \in \mathbb{R}$ (cf. lemma 7.3.1). Beschouw de eigenruimte

$$V = \{\vec{v} \in H \mid f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}$$

Er zijn twee gevallen:

Eerste geval : $\dim(V) = n$. Dan is $V = H$, en $f = \lambda 1_H$. De matrix van f is dan diagonaal met λ op de diagonaal tenopzichte van eender welke basis. Vanwege stelling 7.3.3 bestaat er een orthonormale basis B zodat $[g]_{B,B}$ reëel en diagonaal is. Aangezien $[f]_{B,B} = \lambda I_n$ zijn f en g dus samen diagonaliseerbaar.

Tweede geval : $\dim(V) < n$. Omdat $\dim(V) > 0$ (λ is een eigenwaarde) is ook $0 < \dim(V^\perp) < n$. Verder hebben we

$$f(V) \subset V \tag{7.11}$$

en dus ook

$$f(V^\perp) \subset V^\perp \tag{7.12}$$

(cf. lemma 7.3.2). We beweren nu dat ook

$$g(V) \subset V \tag{7.13}$$

Neem $\vec{x} \in V$. Dan is

$$f(g(\vec{x})) = g(f(\vec{x})) = g(\lambda \vec{x}) = \lambda g(\vec{x})$$

en dus is $g(\vec{x})$ een eigenvector van f met eigenwaarde λ . Dit impliceert dat $g(\vec{x}) \in V$, en dit bewijst (7.13). Uit (7.13) en lemma 7.3.1 volgt nu ook

$$g(V^\perp) \subset V^\perp \tag{7.14}$$

Beschouw de afbeeldingen

$$f|_V, g|_V : V \rightarrow V$$

Dit zijn commuterende hermitische lineaire afbeeldingen, en aangezien $\dim(V) < n$ bestaat vanwege de inductiehypothese een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r\}$ van V tenopzichte waarvan de matrices van $f|_V$ en $g|_V$ reëel en diagonaal zijn. Eenzelfde redenering kunnen we toepassen op

$$f|_{V^\perp}, g|_{V^\perp} : V^\perp \rightarrow V^\perp$$

Uit de inductiehypothese en het feit dat $\dim(V^\perp) < n$ volgt dat er een orthonormale basis $\{\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ van V^\perp bestaat tenopzichte waarvan de matrices van $f|_{V^\perp}$ en $g|_{V^\perp}$ reëel en diagonaal zijn. De matrices van f en g tenopzichte van de basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ van H zijn nu reëel en diagonaal. Dit bewijst het eerste deel van de stelling; het tweede deel volgt er onmiddellijk uit. \square

Uiteraard geldt stelling 7.3.7 ook voor Euclidische ruimten. Verifieer zelf de details.

Stelling 7.3.8. *Onderstel dat E een eindigdimensionale Euclidische ruimte is, en dat $f, g : E \rightarrow E$ twee commuterende zelftoegevoegde lineaire afbeeldingen zijn. Dan bestaat er een orthonormale basis van E waarin zowel de matrices van f als g reële diagonaalmatrices zijn.*

Als A_1 en A_2 twee commuterende reële symmetrische matrices zijn, dan bestaat er een orthogonale matrix M zodanig dat

$$M^t A_1 M = D_1 \quad \text{en} \quad M^t A_2 M = D_2$$

reële diagonaalmatrices zijn.

Diagonalisatie van unitaire afbeeldingen

We zullen nu aantonen dat er voor elke unitaire lineaire afbeelding een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat, en dat de eigenwaarden op de eenheidskring liggen. In het vervolg is H een eindigdimensionale prehilbertruimte.

Lemma 7.3.9. *Alle eigenwaarden van een unitaire lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ zijn van de vorm $\lambda = e^{i\theta}$, m.a.w. de eigenwaarden liggen op de eenheidskring in het complexe vlak.*

Bewijs. Onderstel dat λ een eigenwaarde is van f , en dat \vec{v} een bijhorende eigenvector is. Dan hebben we dat

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{v}), f(\vec{v}) \rangle = \langle \lambda \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

en dus is $\lambda \bar{\lambda} = 1$, zodat λ op de eenheidskring ligt. \square

Stelling 7.3.10. *Voor elke unitaire lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ bestaat een orthonormale basis B van eigenvectoren van f . Tenopzichte van deze basis is de matrix van f een diagonaalmatrix met diagonaalelementen gelegen op de eenheidskring.*

Bewijs. We zullen de stelling bewijzen per inductie op de dimensie van H . Voor $\dim(H) = 1$ is de stelling triviaal.

Onderstel dat de stelling waar is voor $\dim(H) < n$. Onderstel dat $\dim(H) = n$ en neem $f : H \rightarrow H$ unitair. Neem een eigenwaarde λ , en neem een bijhorende eigenvector \vec{e}_1 . Kies \vec{e}_1 zo dat $\|\vec{e}_1\| = 1$. Stel $V = \mathbb{C}\vec{e}_1$. Omdat $f(\vec{e}_1) = \lambda\vec{e}_1$ is $f(V) \subset V$. We beweren nu dat ook $f(V^\perp) \subset V^\perp$.

Voor elke $\vec{x} \in V$ geldt $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, zodat $f^\dagger(\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{x}$. Neem $\vec{y} \in V^\perp$. Voor elke $\vec{x} \in V$ geldt dan

$$\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle = \langle f^\dagger(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \lambda^{-1}\vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda^{-1} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

zodat $f(\vec{y}) \in V^\perp$.

Pas nu de inductiehypothese toe op de afbeelding

$$g = f|_{V^\perp} : V^\perp \rightarrow V^\perp$$

Omdat $\dim(V^\perp) = n - 1$ bestaat een orthonormale basis $\{\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ van V^\perp bestaande uit eigenvectoren van g . De vectoren $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ zijn duidelijk ook eigenvectoren van f , en \vec{e}_1 staat loodrecht op elk van de overige \vec{e}_i (omdat $\vec{e}_1 \in V$ en $\vec{e}_j \in V^\perp$). De verzameling $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ is dus een orthonormale basis van eigenvectoren van f . \square

7.4 Banachruimten en Hilbertruimten

We ronden dit hoofdstuk af met enkele definities. Deze zijn bedoeld ter informatie. We hebben hierboven reeds impliciet de definitie van een genormeerde ruimte gezien. We herhalen deze voor de volledigheid.

Definitie 7.4.1. *Een reële of complexe vectorruimte V uitgerust met een afbeelding*

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$$

wordt een genormeerde ruimte genoemd als voldaan is aan de volgende eigenschappen

1. $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$;
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ en $\alpha \in \mathbb{K}$.

We hebben reeds gezien dat elke Euclidische ruimte en elke prehilbertruimte een genormeerde ruimte is. Uit volgend voorbeeld blijkt dat dit niet de enige voorbeelden van genormeerde ruimten zijn.

Voorbeeld 7.4.2. Neem $V = \mathbb{R}^n$, en definieer een norm als volgt

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Ga zelf na dat deze voldoet aan alle gewenste eigenschappen. Deze norm is echter niet afkomstig van een inwendig product, en dit kunnen we als volgt zien : deze norm voldoet niet aan de parallellogramregel (ga dit zelf na voor bijvoorbeeld het eenheidsvierkant). Het grote voordeel van deze norm tenopzichte van de Euclidische norm is dat hij eenvoudiger gedefinieerd is en in vele situaties gemakkelijker te hanteren.

Definitie 7.4.3. *Onderstel dat $V, \|\cdot\|$ een genormeerde ruimte is, en beschouw een rij vectoren (\vec{x}_n) in V . We zeggen dat de rij $(\vec{x}_n)_n$ naar \vec{x} **convergeert** en noteren*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$$

indien

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \implies \|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$$

*De rij (\vec{x}_n) wordt een **Cauchyrij** genoemd indien*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n, m > N \implies \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$$

In elke genormeerde ruimte geldt dat een convergente rij een Cauchyrij is. Het omgekeerde geldt echter niet altijd, en vandaar volgende definitie:

Definitie 7.4.4. *Een genormeerde ruimte wordt **volledig** genoemd indien elke Cauchyrij in die genormeerde ruimte convergeert. Een volledige genormeerde ruimte wordt ook een **Banachruimte** genoemd. Een volledige prehilbertruimte wordt ook een **Hilbertruimte** genoemd.*

Hoofdstuk 8

Isometrieën

8.1 Isometrieën

Isometrieën

Definitie 8.1.1. *Onderstel dat E een Euclidische ruimte is. Een afbeelding $g : E \rightarrow E$ (niet noodzakelijk lineair) is een **isometrie** als voor elke $\vec{x}, \vec{y} \in E$ geldt dat*

$$\|g(\vec{y}) - g(\vec{x})\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$$

Een isometrie is dus een afbeelding die de afstand bewaart.

We zullen nu bewijzen dat een isometrie steeds te schrijven is als een orthogonale afbeelding gevolgd door een verschuiving. Eerst bewijzen we het volgende lemma.

Lemma 8.1.2. *Onderstel dat E eindigdimensionaal is, dat $g : E \rightarrow E$ een isometrie is, en dat $g(\vec{0}) = \vec{0}$. Dan is g een orthogonale lineaire afbeelding.*

Bewijs. Voor elke $\vec{x} \in E$ geldt

$$\|g(\vec{x})\| = \|g(\vec{x}) - g(\vec{0})\| = \|\vec{x} - \vec{0}\| = \|\vec{x}\|$$

Uit (6.8) volgt nu ook dat

$$\begin{aligned} 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \\ &= \|g(\vec{x})\|^2 + \|g(\vec{y})\|^2 - \|g(\vec{x}) - g(\vec{y})\|^2 \\ &= 2\langle g(\vec{x}), g(\vec{y}) \rangle \end{aligned}$$

voor elke $\vec{x}, \vec{y} \in E$. We hoeven dus enkel te bewijzen dat g lineair is. Als $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ een orthonormale basis is van E , dan is dus ook $\{g(\vec{e}_1), g(\vec{e}_2), \dots, g(\vec{e}_n)\}$ een orthonormale basis. Voor

elke $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $i \in \{1, \dots, n\}$ hebben we nu

$$\begin{aligned} & \langle g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) - \alpha g(\vec{x}) - \beta g(\vec{y}), g(\vec{e}_i) \rangle \\ &= \langle g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}), g(\vec{e}_i) \rangle - \alpha \langle g(\vec{x}), g(\vec{e}_i) \rangle - \beta \langle g(\vec{y}), g(\vec{e}_i) \rangle \\ &= \langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{e}_i \rangle - \alpha \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle - \beta \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

en dus is

$$g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y})$$

en g is lineair. □

Stelling 8.1.3. *Onderstel dat E een eindigdimensionale Euclidische ruimte is. Elke isometrie g van E kan op unieke wijze geschreven worden als de samenstelling van een verschuiving en een orthogonale lineaire afbeelding, meer bepaald*

$$g(\vec{x}) = g(\vec{0}) + f(\vec{x})$$

voor elke $\vec{x} \in E$. Hierbij is f een orthogonale lineaire afbeelding.

Bewijs. Definieer f door

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - g(\vec{0})$$

f is dan nog steeds een isometrie (waarom?), en $f(\vec{0}) = \vec{0}$, zodat f een orthogonale lineaire afbeelding is.

De uniciteit kunnen we als volgt aantonen: als

$$g(\vec{x}) = \vec{a} + f_1(\vec{x})$$

dan volgt onmiddellijk dat $\vec{a} = g(\vec{0})$ en dus is $f_1(\vec{x}) = g(\vec{x}) - g(\vec{0}) = f(\vec{x})$. □

Vooraleer we de volgende eigenschap formuleren herhalen we nog eens de definitie van een **groep**. Dit is een verzameling G , uitgerust met een bewerking $*$: $G \times G \rightarrow G$: $(a, b) \mapsto a * b$, waarvoor geldt:

1. $*$ is associatief:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

voor alle $a, b, c \in G$;

2. er is een neutraal element e voor $*$ in G : er bestaat een $e \in G$ zodat voor elke $a \in G$ geldt:

$$a * e = e * a = a$$

3. elk element a in G heeft een invers: er bestaat een $b \in G$ zodat

$$a * b = b * a = e$$

Stelling 8.1.4. *De verzameling van alle isometrieën van een eindigdimensionale Euclidische ruimte E is een groep voor de samenstelling. De verzameling van alle orthogonale transformaties van E is hiervan een deelgroep.*

Bewijs. Het is duidelijk dat de samenstelling van twee isometrieën opnieuw een isometrie is. De samenstelling van isometrieën is associatief (want de samenstelling van afbeeldingen is altijd associatief). De identieke afbeelding 1_E bewaart de afstand en is dus een isometrie. Uit stelling 6.4.3 volgt dat elke orthogonale afbeelding bijjectief is. Uit stelling 8.1.3 volgt dezelfde eigenschap voor isometrieën: als

$$g(\vec{x}) = g(\vec{0}) + f(\vec{x})$$

waarbij f een orthogonale lineaire transformatie is, dan wordt de inverse van de isometrie g gegeven door de formule

$$g^{-1}(\vec{x}) = f^{-1}(\vec{x}) - f^{-1}(g(\vec{0}))$$

Immers, voor elke $\vec{x} \in E$ hebben we

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(\vec{x})) &= f^{-1}(g(\vec{x})) - f^{-1}(g(\vec{0})) \\ &= f^{-1}(g(\vec{x}) - g(\vec{0})) \\ &= f^{-1}(f(\vec{x})) = \vec{x} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g(g^{-1}(\vec{x})) &= g(f^{-1}(\vec{x}) - f^{-1}(g(\vec{0}))) \\ &= g(\vec{0}) + f(f^{-1}(\vec{x}) - f^{-1}(g(\vec{0}))) \\ &= g(\vec{0}) + f(f^{-1}(\vec{x})) - f(f^{-1}(g(\vec{0}))) \\ &= g(\vec{0}) + \vec{x} - g(\vec{0}) = \vec{x} \end{aligned}$$

De isometrieën vormen dus een groep. Om in te zien dat de orthogonale transformaties een deelgroep vormen, volstaat het om op te merken dat de samenstelling van twee orthogonale transformaties opnieuw een orthogonale transformatie is, en dat de inverse van een orthogonale transformatie opnieuw een orthogonale transformatie is. \square

De determinant van een orthogonale transformatie is steeds 1 of -1 . Als de determinant van het lineair gedeelte van een isometrie 1 is, dan noemen we deze een **verplaatsing** of **positieve isometrie**. Anders spreken we van een **negatieve isometrie** of **antiverplaatsing**. We zullen nu enkele speciale gevallen nader bespreken.

Symmetrieën en orthogonale projecties

Onderstel dat $L = \vec{a} + V$ een lineaire variëteit is in een Euclidische ruimte E . Elke vector $\vec{x} \in E$ kan dan op een unieke manier geschreven worden onder de vorm

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{v} + \vec{w}$$

waarbij $\vec{v} \in V$ en $\vec{w} \in V^\perp$. De afbeelding

$$s_L : E \rightarrow E : \vec{x} = \vec{a} + \vec{v} + \vec{w} \mapsto s_L(\vec{x}) = \vec{a} + \vec{v} - \vec{w}$$

noemen we de **symmetrie** ten opzichte van de lineaire variëteit L .

De afbeelding

$$p_L : E \rightarrow E : \vec{x} = \vec{a} + \vec{v} + \vec{w} \mapsto p_L(\vec{x}) = \vec{a} + \vec{v}$$

noemen we de **orthogonale projectie** van E op de lineaire variëteit L .

Speciale gevallen

- 1) Als $V = E$ (en dus $L = E$ en $\dim(V) = n = \dim(E)$), dan is s_L de identiteit 1_E .
- 2) Als $V = \{\vec{0}\}$ (en dus $L = \{\vec{a}\}$ en $\dim(V) = 0$), dan noemen we $s_{\vec{a}}$ de **puntsymmetrie** ten opzichte van het punt \vec{a} .
- 3) Als $\dim(V) = \dim(E) - 1$, dan noemen we s_L de **spiegeling** ten opzichte van het hypervlak L .
- 4) Als $\dim(V) = 1$, dan is $L = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}$ een rechte. s_L noemen we de symmetrie ten opzichte van de rechte L .

Voorbeeld 8.1.5. Zij L de rechte met vergelijking $x + y = 1$ in het Euclidische vlak \mathbb{R}^2 uitgerust met het standaard inwendig product. De onderliggende vectorruimte V is dan de rechte met vergelijking $x + y = 0$, en $\{\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\}$ is een orthonormale basis voor V .

$\{\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\}$ is dan een orthonormale basis voor V^\perp . Met notaties als hierboven kunnen we $\vec{a} = (1, 0)$ stellen. Elke $\vec{x} = (x, y)$ kan dus geschreven worden onder de vorm

$$\vec{x} = \vec{a} + \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$$

waarbij de coëfficiënten α en β kunnen gevonden worden door oplossing van het lineair stelsel

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Oplossen van dit lineair stelsel geeft ons

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 1) \\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1) \end{cases}$$

zodat

$$\vec{x} = \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 1)\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1)\vec{e}_2$$

en

$$\begin{aligned}
 s_L(\vec{x}) &= \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1)\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1)\vec{e}_2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-y-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x+y-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1-y \\ 1-x \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ook de projectie op L kunnen we expliciet uitrekenen:

$$\begin{aligned}
 p_L(\vec{x}) &= \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1)\vec{e}_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-y-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y+1 \\ -x+y+1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Stelling 8.1.6. s_L is een isometrie. s_L is een verplaatsing als $\dim E - \dim L$ even is; als $\dim E - \dim L$ oneven is, dan is s_L een negatieve isometrie.

Bewijs. Bewijs als oefening dat s_L een isometrie is.

Zoals hierboven schrijven we $L = \vec{a} + V$. Onderstel dat $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r\}$ een orthonormale basis van V is, en $\{\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ een orthonormale basis van V^\perp .

Omdat s_L een isometrie is, weten we dat

$$s_L(\vec{x}) = s_L(\vec{0}) + f(\vec{x})$$

waarbij f een orthogonale afbeelding is. Om f te bepalen gaan we als volgt tewerk.

$$\vec{a} = s_L(\vec{a}) = s_L(\vec{0}) + f(\vec{a})$$

Beide formules van mekaar aftrekken levert

$$s_L(\vec{x}) - \vec{a} = f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = f(\vec{x} - \vec{a})$$

We schrijven nu $\vec{x} - \vec{a}$ uit in de basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$: we vinden unieke coëfficiënten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ zodat

$$\vec{x} - \vec{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$$

We vinden dat

$$\begin{aligned}
 s_L(\vec{x}) &= s_L\left(\vec{a} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{e}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \vec{e}_i\right) \\
 &= \vec{a} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{e}_i - \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \vec{e}_i \\
 &= \vec{a} + f(\vec{x} - \vec{a})
 \end{aligned}$$

en we zien dat $f : E \rightarrow E$ de lineaire afbeelding is bepaald door de formule

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{e}_i - \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \vec{e}_i$$

De matrix van f ten opzichte van de orthonormale basis $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ is dus

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Tenslotte zien we dat

$$\det(f) = \det(A) = (-1)^{n-r}$$

□

Men noemt een deel $X \subset E$ **symmetrisch** ten opzichte van de lineaire variëteit L als X op zichzelf wordt afgebeeld door s_L :

$$s_L(X) = X$$

Als X symmetrisch is ten opzichte van de (nuldimensionale) lineaire variëteit $L = \{\vec{m}\}$, dan noemen we \vec{m} een **middelpunt** van X .

Als X symmetrisch is ten opzichte van de rechte (= ééndimensionale lineaire variëteit) L , dan noemen we L een **symmetrieas** van X .

Als X symmetrisch is ten opzichte van het vlak (= tweedimensionale lineaire variëteit) L , dan noemen we L een **symmetrievlak** van X .

Voorbeelden 8.1.7. 1) Zij X de (regelmatige) zeshoek in \mathbb{R}^2 met hoekpunten

$$(1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (-1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ en } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Het punt $(0, 0)$ is een middelpunt van X , en de rechten met vergelijking

$$y = x \operatorname{tg} \frac{k\pi}{6}$$

($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) zijn symmetrieassen.

2) Stel nu $X = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$. X bestaat dus uit die punten in het vlak die gehele coördinaten hebben.

Elke $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ is een middelpunt. Ook de punten $(m + \frac{1}{2}, n)$, $(m, n + \frac{1}{2})$ en $(m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ zijn middelpunten (voor $m, n \in \mathbb{Z}$). De rechten $y = n$, $x = m$, $x + y = m$, $x - y = n$ ($n \in \mathbb{Z}$) zijn symmetrieassen.

Een functie $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ wordt **symmetrisch** ten opzichte van de lineaire variëteit L genoemd als

$$\psi \circ s_L = \psi$$

of

$$\psi(s_L(\vec{x})) = \psi(\vec{x})$$

voor elke $\vec{x} \in E$.

Als ψ symmetrisch is tenopzichte van L , dan is het hyperoppervlak S in E met vergelijking

$$\psi(\vec{x}) = c$$

symmetrisch tenopzichte van L . S wordt ook het **niveauperoppervlak** van ψ op niveau c genoemd.

Immers, indien $\vec{x} \in S$, dan is $\psi(\vec{x}) = c$, en dus ook $\psi(s_L(\vec{x})) = c$, zodat ook $s_L(\vec{x}) \in S$, en dus wordt S op zichzelf afgebeeld door s_L .

Voorbeelden 8.1.8. 1) De functie $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door de formule

$$\psi(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^4 + (z - c)^6$$

is symmetrisch tenopzichte van het punt (a, b, c) .

2) De functie $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door de formule

$$\psi(x, y, z) = (x - a)^3 + (y - b)^3 + (z - c)^6$$

is symmetrisch tenopzichte van het vlak met vergelijking

$$z = c$$

Rotaties en omwentelingssymmetrie

Zij E een Euclidische ruimte van dimensie $n \geq 2$, en $L = \vec{a} + V$ een lineaire variëteit van dimensie $n - 2$. Dan is V een deelruimte van E van dimensie $n - 2$ en V^\perp een deelruimte van dimensie 2. Kies een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ van V^\perp . Elke $\vec{x} \in E$ kan op unieke wijze geschreven worden onder de vorm

$$\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \vec{a} + \vec{v}$$

waarbij $x, y \in \mathbb{R}$ en $\vec{v} \in V$. Neem nu $\theta \in \mathbb{R}$, en beschouw de afbeelding $\rho : E \rightarrow E$ gedefinieerd door

$$\rho(\vec{x}) = (x \cos \theta - y \sin \theta)\vec{e}_1 + (x \sin \theta + y \cos \theta)\vec{e}_2 + \vec{a} + \vec{v} \quad (8.1)$$

We noemen ρ de **rotatie** om L over een hoek θ in de richting van \vec{e}_1 naar \vec{e}_2 .

Beschouw het bijzonder geval $E = \mathbb{R}^2$ (met het standaard inwendig product). Dan is $\dim(L) = \dim(V) = 0$, zodat de lineaire variëteit L zich herleidt tot het punt \vec{a} . Schrijf $\vec{a} = (a, b)$. We kunnen elke vector $\vec{x} \in E$ schrijven onder de vorm

$$\vec{x} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

We vinden nu dat

$$\rho \begin{pmatrix} a + x \\ b + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dit stelt inderdaad een rotatie in het vlak voor, over een hoek θ , rond het punt $\vec{a} = (a, b)$. We merken op dat het beeld (y_1, y_2) van een punt (x_1, x_2) na rotatie over θ rond (m_1, m_2) voldoet aan

$$\begin{cases} y_1 &= m_1 + (x_1 - m_1) \cos \theta - (x_2 - m_2) \sin \theta \\ y_2 &= m_2 + (x_1 - m_1) \sin \theta + (x_2 - m_2) \cos \theta \end{cases} .$$

We noemen $X \subset E$ **omwentelingssymmetrisch** ten opzichte van de lineaire variëteit L van dimensie $n - 2$ als X door *elke* rotatie om L op zichzelf wordt afgebeeld, dit wil zeggen

$$\rho(X) = X$$

voor elke rotatie ρ om L .

Voorbeeld 8.1.9. De cilinder $x^2 + y^2 = a^2$ in \mathbb{R}^3 is omwentelingssymmetrisch ten opzichte van de z -as.

Een functie $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ wordt **omwentelingssymmetrisch** ten opzichte van de lineaire variëteit L van dimensie $n - 2$ genoemd als

$$\psi \circ \rho = \psi$$

of

$$\psi(\rho(\vec{x})) = \psi(\vec{x})$$

voor *elke* rotatie ρ om L en elke $\vec{x} \in E$.

Voorbeeld 8.1.10. De functie $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door de formule

$$\psi(\vec{x}) = (x - a)^2 + (z - c)^2$$

is omwentelingssymmetrisch ten opzichte van de rechte met vergelijking

$$\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$$

Als de functie ψ omwentelingssymmetrisch is ten opzichte van L , dan zijn de niveauhyperoppervlakken (dit zijn de hyperoppervlakken met vergelijking $\psi(\vec{x}) = c$) ook omwentelingssymmetrisch ten opzichte van L .

8.2 Classificatie van de isometrieën

In deze paragraaf zullen we achtereenvolgens de isometrieën van de Euclidische ruimten van dimensies 1, 2 en 3 bespreken. In § 6.4 hebben we reeds de orthogonale transformaties van \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 besproken. We klasseerden deze volgens de dimensie van de vectorruimte der dekpunten, en we zullen deze classificatie verder uitgebreid gebruiken. In het vervolg is

$$g : E \rightarrow E$$

een isometrie. Hierbij zal E de Euclidische ruimte \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 zijn, steeds uitgerust met het standaard inwendig product. We schrijven $\vec{a} = g(\vec{0})$ en $f = g - \vec{a}$. f is dan een orthogonale lineaire transformatie, en we noteren de vectorruimte der dekpunten van f door V .

De isometrieën van \mathbb{R}

De orthogonale transformaties van \mathbb{R} kunnen eenvoudig geklasseerd worden: als

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto mx$$

een orthogonale transformatie, dan is noodzakelijkerwijs

$$\det(f) = m = \pm 1$$

Er zijn dus slechts twee orthogonale transformaties van \mathbb{R} :

1) de identiteit; in dit geval is $\dim(V) = 1$;

2) de symmetrie $x \mapsto -x$; in dit geval is $\dim(V) = 0$.

De isometrieën van \mathbb{R} kunnen dus als volgt beschreven worden:

eerste geval: $\dim(V) = 1$

$$g(x) = a + x$$

is dan de verschuiving over a .

tweede geval: $\dim(V) = 0$

$$g(x) = a - x$$

is dan de puntsymmetrie tenopzichte van het punt $a/2$.

De isometrieën van \mathbb{R}^2

eerste geval: $\dim(V) = 2$

f is de identiteit op \mathbb{R}^2 , en g wordt gegeven door de formule

$$g(\vec{x}) = \vec{a} + \vec{x}$$

g is dus de verschuiving over \vec{a} .

tweede geval: $\dim(V) = 0$

In dit geval is f een rotatie rond de oorsprong, met hoek $\theta \neq 2k\pi$. De matrix van f is dan van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Schrijf $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $g(\vec{x}) = \vec{y} = (y_1, y_2)$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$. De isometrie g wordt dan gegeven door de formules

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ y_2 = a_2 + x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases} \quad (8.2)$$

Om te zien wat (8.2) meetkundig voorstelt zoeken we eerst de dekpunten van g . Dit zijn de oplossingen van het lineair stelsel

$$\begin{cases} x_1(\cos \theta - 1) - x_2 \sin \theta = -a_1 \\ x_1 \sin \theta + x_2(\cos \theta - 1) = -a_2 \end{cases} \quad (8.3)$$

De determinant van (8.3) is

$$(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2 - 2 \cos \theta \neq 0$$

omdat $\theta \neq 2k\pi$. (8.3) is dus een stelsel van Cramer, en heeft een unieke oplossing, we noemen deze (m_1, m_2) . (8.2) kan nu herschreven worden onder de vorm

$$\begin{cases} y_1 - m_1 = (x_1 - m_1) \cos \theta - (x_2 - m_2) \sin \theta \\ y_2 - m_2 = (x_1 - m_1) \sin \theta + (x_2 - m_2) \cos \theta \end{cases} \quad (8.4)$$

en hieruit volgt dat g de rotatie is rond (m_1, m_2) over de hoek θ .

derde geval: $\dim(V) = 1$

In dit geval is f de orthogonale spiegeling ten opzichte van een rechte vect $\{\vec{d}\}$ door de oorsprong, en g wordt gegeven door een formule van de vorm

$$g(\vec{x}) = \vec{a} + f(\vec{x})$$

Schrijf

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

waarbij $\vec{a}_1 \parallel \vec{d}$ en $\vec{a}_2 \perp \vec{d}$. We bekijken eerst de isometrie g_2 gegeven door de formule

$$g_2(\vec{x}) = \vec{a}_2 + f(\vec{x})$$

Omdat \vec{d} en \vec{a}_2 een basis van \mathbb{R}^2 vormen, kunnen we elke $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ schrijven onder de vorm

$$\vec{x} = \alpha \vec{a}_2 + \beta \vec{d}$$

Nu is

$$f(\vec{x}) = -\alpha \vec{a}_2 + \beta \vec{d}$$

en

$$g_2(\vec{x}) = \vec{a}_2 - \alpha \vec{a}_2 + \beta \vec{d}$$

\vec{x} is een dekpunt van g_2 als en alleen als $\alpha = 1 - \alpha$ of $\alpha = 1/2$. Daarom noteren we $\alpha' = \alpha - 1/2$ en

$$\vec{x} = \frac{\vec{a}_2}{2} + \alpha' \vec{a}_2 + \beta \vec{d}$$

en

$$g_2(\vec{x}) = \frac{\vec{a}_2}{2} - \alpha' \vec{a}_2 + \beta \vec{d}$$

We zien nu dat $g_2 = s_L$, de spiegeling is tenopzichte van de rechte $L = \vec{a}_2/2 + \text{vect}\{\vec{d}\}$. We vinden tenslotte dat

$$g(\vec{x}) = \vec{a}_1 + s_L(x)$$

De isometrie g kan dus beschreven worden als een spiegeling gevolgd door een verschuiving evenwijdig met de as van de spiegeling. Soms noemt men zulk een samenstelling een **schuifspiegeling**.

De isometrieën van \mathbb{R}^3

eerste geval: $\dim(V) = 3$

f is de identiteit op \mathbb{R}^3 , en g wordt gegeven door de formule

$$g(\vec{x}) = \vec{a} + \vec{x}$$

g is dus de verschuiving over \vec{a} .

tweede geval: $\dim(V) = 2$

f is nu de spiegeling tenopzichte van het vlak V door de oorsprong. We schrijven

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

met $\vec{a}_1 \in V$ en $\vec{a}_2 \perp V$. Beschouw het vlak

$$L = \frac{\vec{a}_2}{2} + V$$

Elke $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ kunnen we schrijven onder de vorm

$$\vec{x} = \frac{\vec{a}_2}{2} + \alpha \vec{a}_2 + \vec{z}$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{z} \in V$. Merk nu op dat

$$\begin{aligned} s_L(\vec{x}) &= \frac{\vec{a}_2}{2} - \alpha \vec{a}_2 + \vec{z} \\ &= \vec{a}_2 - \left(\frac{\vec{a}_2}{2} + \alpha \vec{a}_2 \right) + \vec{z} \\ &= \vec{a}_2 + s_V(\vec{x}) \\ &= \vec{a}_2 + f(\vec{x}) \end{aligned}$$

en dus

$$g(\vec{x}) = \vec{a}_1 + s_L(\vec{x})$$

We besluiten dat g bestaat uit een spiegeling tenopzichte van het vlak L , gevolgd door een verschuiving evenwijdig met L . Zulke isometrie g wordt soms **schuifspiegeling** genoemd.

derde geval: $\dim(V) = 1$

Nu is f een rotatie over een hoek $\theta \neq 2k\pi$ rond een rechte door de oorsprong. We kiezen een orthonormale basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ van \mathbb{R}^3 zodanig dat \vec{e}_1 langs de rotatieas gelegen is. De matrix van f tenopzichte van B is dan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Als we noteren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en $g(\vec{x}) = (y_1, y_2, y_3)$, dan kunnen we volgende formule opschrijven voor de isometrie g :

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + x_1 \\ y_2 = a_2 + x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ y_3 = a_3 + x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{cases} \quad (8.5)$$

Omdat $\theta \neq 2k\pi$ bestaat er juist één koppel (m_2, m_3) zodat

$$\begin{cases} m_2 = a_2 + m_2 \cos \theta - m_3 \sin \theta \\ m_3 = a_3 + m_2 \sin \theta + m_3 \cos \theta \end{cases}$$

en we kunnen dus schrijven

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + x_1 \\ y_2 - m_2 = (x_2 - m_2) \cos \theta - (x_3 - m_3) \sin \theta \\ y_3 - m_3 = (x_2 - m_2) \sin \theta + (x_3 - m_3) \cos \theta \end{cases} \quad (8.6)$$

g is dus een rotatie om de as $m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3 + \text{vect}\{\vec{e}_1\}$ over de hoek θ , gevolgd door een verschuiving over $a_1\vec{e}_1$. Dit heet een **schroefbeweging**.

Vierde geval: $\dim(V) = 0$

f is nu een rotatie, gevolgd door een spiegeling tenopzichte van het vlak door de oorsprong en loodrecht op de rotatieas. We kiezen nu een orthonormale basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ van \mathbb{R}^3 zodanig dat \vec{e}_1 langs de rotatieas gelegen is. Ditkeer wordt g gegeven door de formules

$$\begin{cases} y_1 = a_1 - x_1 \\ y_2 = a_2 + x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ y_3 = a_3 + x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{cases} \quad (8.7)$$

We gaan tewerk zoals in het tweede geval en vinden (m_2, m_3) zodat

$$\begin{cases} y_1 = a_1 - x_1 \\ y_2 - m_2 = (x_2 - m_2) \cos \theta - (x_3 - m_3) \sin \theta \\ y_3 - m_3 = (x_2 - m_2) \sin \theta + (x_3 - m_3) \cos \theta \end{cases} \quad (8.8)$$

Dit betekent dat g een rotatie is, gevolgd door een spiegeling om een vlak loodrecht op de rotatieas. Bepaal als oefening de vergelijking van het spiegelvlak. Sommige auteurs gebruiken voor dit type isometrie de benaming **spiegelrotatie** of **draaispiegeling**.

Hoofdstuk 9

Kwadratische vormen en kwadrieken

9.1 Bilineaire afbeeldingen en kwadratische vormen

In het vervolg is E een n -dimensionale Euclidische ruimte. Herhaal dat een afbeelding

$$b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

bilineair is als

$$\begin{aligned} b(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= \alpha b(\vec{x}, \vec{z}) + \beta b(\vec{y}, \vec{z}) \\ b(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) &= \alpha b(\vec{x}, \vec{y}) + \beta b(\vec{x}, \vec{z}) \end{aligned}$$

voor elke $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Neem een basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ van E . Voor $\vec{x}, \vec{y} \in E$ schrijven we

$$[\vec{x}]_B = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad [\vec{y}]_B = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

We berekenen nu gemakkelijk dat

$$\begin{aligned} b(\vec{x}, \vec{y}) &= b\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \end{aligned}$$

We noteren $a_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Onderstel dat A de $n \times n$ matrix is met a_{ij} in de (i, j) -positie. Dan is

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = X^t A Y$$

Definitie 9.1.1. *Onderstel dat $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ een bilineaire afbeelding is. De afbeelding $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door de formule*

$$q(\vec{x}) = b(\vec{x}, \vec{x})$$

*noemen we de **kwadratische vorm** geassocieerd met de bilineaire afbeelding b .*

Voorbeeld 9.1.2. *Neem $E = \mathbb{R}^2$ met de standaardbasis. We hebben dan dat*

$$b(X, Y) = X^t A Y = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

en

$$q(X) = b(X, X) = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

In het algemeen hebben we dat

$$q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

Onderstel dat een kwadratische vorm q gegeven is. Kunnen we hieruit de bilineaire afbeelding b vanwaaruit q geconstrueerd is opnieuw berekenen? Merk op dat

$$\begin{aligned} q(\vec{x} + \vec{y}) &= b(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= b(\vec{x}, \vec{x}) + b(\vec{x}, \vec{y}) + b(\vec{y}, \vec{x}) + b(\vec{y}, \vec{y}) \\ &= q(\vec{x}) + b(\vec{x}, \vec{y}) + b(\vec{y}, \vec{x}) + q(\vec{y}) \end{aligned}$$

zodat

$$b(\vec{x}, \vec{y}) + b(\vec{y}, \vec{x}) = q(\vec{x} + \vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})$$

Als we weten dat b een *symmetrische* bilineaire afbeelding is, dan volgt dat

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x} + \vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})) \tag{9.1}$$

In hoeverre geeft dit een antwoord op onze vraag? Een bilineaire afbeelding b kan steeds geschreven worden onder de vorm

$$b = b_1 + b_2$$

waarbij

$$b_1(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(b(\vec{x}, \vec{y}) + b(\vec{y}, \vec{x}))$$

en

$$b_2(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(b(\vec{x}, \vec{y}) - b(\vec{y}, \vec{x}))$$

Hierbij is b_1 een *symmetrische* en b_2 een *alternerende* bilineaire afbeelding. De kwadratische vorm geassocieerd aan b_1 is dezelfde als die geassocieerd aan b , terwijl de kwadratische vorm geassocieerd aan b_2 nul is:

$$\begin{aligned} q_1(\vec{x}) &= \frac{1}{2}(b(\vec{x}, \vec{x}) + b(\vec{x}, \vec{x})) = q(\vec{x}) \\ q_2(\vec{x}) &= \frac{1}{2}(b(\vec{x}, \vec{x}) - b(\vec{x}, \vec{x})) = 0 \end{aligned}$$

Positief en negatief definitie kwadratische vormen

Definitie 9.1.3. Zij E een eindigdimensionale Euclidische ruimte, en $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ een kwadratische vorm.

We noemen q **positief definitief** als

$$q(\vec{x}) > 0$$

voor elke $\vec{x} \neq \vec{0}$; we noemen q **negatief definitief** als

$$q(\vec{x}) < 0$$

voor elke $\vec{x} \neq \vec{0}$; we noemen q **positief semidefiniet** als

$$q(\vec{x}) \geq 0$$

voor elke $\vec{x} \neq \vec{0}$; we noemen q **negatief semidefiniet** als

$$q(\vec{x}) \leq 0$$

voor elke $\vec{x} \neq \vec{0}$; we noemen q **indefinitief** als q zowel positieve als negatieve waarden aanneemt.

Voorbeeld 9.1.4. We beschouwen het allereenvoudigste geval: $E = \mathbb{R}$. Een kwadratische vorm q is dan te schrijven als volgt:

$$q(x) = ax^2$$

waarbij $a \in \mathbb{R}$. Er zijn drie gevallen:

- 1) $a > 0 \implies q$ is positief definitief;
- 2) $a < 0 \implies q$ is negatief definitief;
- 3) $a = 0 \implies q$ is zowel positief als negatief semidefiniet.

Voorbeeld 9.1.5. Het op één na eenvoudigste is het geval $E = \mathbb{R}^2$. Een kwadratische vorm kan nu geschreven worden als

$$q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$$

We moeten het teken onderzoeken van $q(x, y)$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$. Voor $y \neq 0$ geldt dat het teken van $q(x, y)$ hetzelfde is als dat van

$$r\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2s\frac{x}{y} + t \tag{9.2}$$

Dit is een kwadratische functie van x/y . Als de (vereenvoudigde) discriminant $D = s^2 - rt$ negatief is, dan heeft deze kwadratische functie geen nulpunten, en dus een constant teken. Dit teken is dan het teken van t . Bovendien volgt uit $s^2 - rt < 0$ dat $0 \leq s^2 < rt$ zodat r en t noodzakelijk hetzelfde teken hebben. Als $y = 0$, dan weten we dat $x \neq 0$, en heeft $q(x, y) = q(x, 0) = rx^2$ hetzelfde teken als r .

We kunnen dus concluderen:

- Als $D = s^2 - rt < 0$, en $r > 0$ (of $t > 0$), dan is q positief definitief;
Als $D = s^2 - rt < 0$, en $r < 0$ (of $t < 0$), dan is q negatief definitief.

Onderstel nu dat $D = 0$. Herhaling van bovenstaande redenering levert nu dat q nog steeds een constant teken heeft, maar op sommige plaatsen nul wordt. Immers, in dit geval is

$$\frac{s^2}{r^2} = \frac{t}{r}$$

zodat r en t weer hetzelfde teken hebben en ook

$$\begin{aligned} q(x, y) &= rx^2 + 2sxy + ty^2 \\ &= r\left(x^2 + 2\frac{s}{r}xy + \frac{t}{r}y^2\right) \\ &= r\left(x + \frac{s}{r}y\right)^2 \end{aligned}$$

hetzelfde teken heeft als r . Voor $rx + sy = 0$ is $q(x, y) = 0$ en we kunnen besluiten:

Als $D = s^2 - rt = 0$, en $r > 0$ (of $t > 0$), dan is q positief semidefinit (maar niet positief definit);

Als $D = s^2 - rt = 0$, en $r < 0$ (of $t < 0$), dan is q negatief semidefinit (maar niet negatief definit).

Als tenslotte $D > 0$, dan neemt (9.2) zowel positieve als negatieve waarden aan, en dus is q indefinit.

Voorbeeld 9.1.6. In vele gevallen kan men aan een kwadratische vorm onmiddellijk zien of hij definit of indefinit is. De kwadratische vormen

$$\begin{aligned} q(x, y) &= x^2 + y^2 \\ q(x, y) &= (x + y)^2 + (x - y)^2 \\ q(x, y, z) &= (x + y)^2 + z^2 + (x - y)^2 \\ q(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 \end{aligned}$$

zijn allen positief definit. De kwadratische vormen

$$\begin{aligned} q(x, y) &= x^2 - y^2 \\ q(x, y) &= (x + y)^2 - (x - y)^2 \\ q(x, y, z) &= (x + y)^2 - z^2 + (x + y - z)^2 \\ q(x, y, z) &= x^2 - 2y^2 \\ q(x, y) &= (x + y)(x - y) \end{aligned}$$

zijn allen indefinit. De kwadratische vormen

$$\begin{aligned} q(x, y) &= x^2 \\ q(x, y) &= (x + y)^2 \\ q(x, y, z) &= x^2 + y^2 \\ q(x, y, z) &= (x + y)^2 + z^2 \\ q(x, y, z) &= (x + y)^2 + z^2 + (x + y - z)^2 \end{aligned}$$

zijn positief semidefinit. Verklaar dit zelf.

Onderstel nu het algemeen geval: E is een n -dimensionale Euclidische ruimte. We leggen een orthonormale basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ vast. Zij b de symmetrische bilineaire vorm waaraan q geassocieerd is, en schrijf

$$b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = a_{ij}$$

De matrix A met a_{ij} op de positie (i, j) is dan symmetrisch. Uit stelling 7.3.5 volgt nu dat er een orthogonale matrix M bestaat zodat

$$M^t A M = D$$

een reële diagonaalmatrix is. We schrijven nu

$$\vec{u}_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} \vec{e}_j$$

$U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ is dan een nieuwe orthonormale basis van E , en

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \vec{u}_j$$

Bovendien is

$$\begin{aligned} b(\vec{u}_i, \vec{u}_j) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b(m_{ki} \vec{e}_k, m_{lj} \vec{e}_l) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lj} \end{aligned}$$

het element op positie (i, j) van de matrix $M^t A M = D$. Als we het i -de diagonaalelement van de matrix D d_{ii} noemen, dan volgt dus dat

$$b(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij} d_{ii}$$

Merk op dat de d_{ii} de eigenwaarden van de matrix A zijn. Omgekeerd, indien we een orthonormale basis $U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ zo kunnen kiezen dat

$$b(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij} d_{ii}$$

dan is $A = M D M^t$ en dus $M^t A M = D$, en dan zijn de d_{ii} noodzakelijkerwijs de eigenwaarden van de matrix A .

We rangschikken de vectoren \vec{u}_i nu zodanig dat

- $1 \leq k \leq s \implies d_{kk} > 0$. We noteren $d_{kk} = \alpha_k^2$;
- $s < k \leq d \implies d_{kk} < 0$. We noteren $d_{kk} = -\beta_k^2$;
- $k > d \implies d_{kk} = 0$.

Neem nu $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{u}_i$ en $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{u}_i$ in E . Dan is

$$\begin{aligned} b(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j b(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i d_{ii} \\ &= \alpha_1^2 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_s^2 x_s y_s - \beta_{s+1}^2 x_{s+1} y_{s+1} - \cdots - \beta_d^2 x_d y_d \end{aligned} \quad (9.3)$$

en we vinden dat

$$q(\vec{x}) = \alpha_1^2 x_1^2 + \cdots + \alpha_s^2 x_s^2 - \beta_{s+1}^2 x_{s+1}^2 - \cdots - \beta_d^2 x_d^2 \quad (9.4)$$

Hiermee is de volgende stelling bewezen.

Stelling 9.1.7. (Sylvester) *Onderstel dat $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ een symmetrische bilineaire afbeelding is. Er bestaat een orthonormale basis $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ van E en unieke getallen $s \leq d$, α_i , β_i zodat*

$$\begin{aligned} b(\vec{u}_i, \vec{u}_j) &= 0 && \text{als } i \neq j \\ b(\vec{u}_i, \vec{u}_i) &= \alpha_i^2 > 0 && \text{als } 1 \leq i \leq s \\ b(\vec{u}_i, \vec{u}_i) &= -\beta_i^2 < 0 && \text{als } s+1 \leq i \leq d \\ b(\vec{u}_i, \vec{u}_i) &= 0 && \text{als } d+1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

De bilineaire afbeelding b en de geassocieerde kwadratische vorm q worden dan expliciet beschreven door de formules (9.3) en (9.4).

We kunnen nu gemakkelijk zien wanneer een kwadratische vorm definitief, semidefiniet of indefiniet is.

Gevolg 9.1.8. *Onderstel dat $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ de kwadratische vorm is geassocieerd aan de symmetrische bilineaire vorm $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Met notaties zoals in stelling 9.1.7 hebben we dat*

$$\begin{aligned} q \text{ is positief definitief} &\iff s = d = n \\ q \text{ is positief semidefiniet} &\iff s = d \leq n \\ q \text{ is negatief definitief} &\iff s = 0, d = n \\ q \text{ is negatief semidefiniet} &\iff s = 0, d \leq n \\ q \text{ is indefiniet} &\iff 0 < s < d \end{aligned}$$

Een kwadratische vorm is dus positief (semi)definiet als de bijhorende symmetrische matrix A enkel positieve (niet-negatieve) eigenwaarden heeft. q is negatief (semi)definiet als de bijhorende symmetrische matrix A enkel negatieve (niet-positieve) eigenwaarden heeft. q is indefiniet als A zowel positieve als negatieve eigenwaarden heeft.

Voorbeeld 9.1.9. We beschouwen weer het tweedimensionaal geval $E = \mathbb{R}^2$:

$$q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

We hebben hierboven reeds besproken wanneer q definitief of indefinitief is. We zullen nu met onze nieuwe methode hetzelfde resultaat opnieuw afleiden. We moeten enkel de eigenwaarden zoeken van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

De karakteristieke vergelijking luidt:

$$\det(A - \lambda I_2) = \left| \begin{pmatrix} r - \lambda & s \\ s & t - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - (r + t)\lambda + rt - s^2 = 0$$

De discriminant is

$$(r + t)^2 - 4rt + 4s^2 = (r - t)^2 + 4s^2 \geq 0$$

zoals moet. Noem de twee wortels λ_1 en λ_2 . Uit de som- en productregel volgt

$$\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 \quad \text{en} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = r + t$$

Als $rt - s^2 < 0$, of $s^2 - rt > 0$, dan hebben de twee wortels verschillend teken, en dan is q indefinitief.

Als $rt - s^2 > 0$, of $s^2 - rt < 0$, dan hebben de twee wortels hetzelfde teken. Indien $r > 0$ (en dus $t > 0$), dan is q positief definitief; indien $r < 0$ (en dus $t < 0$), dan is q negatief definitief.

Als $s^2 - rt = 0$, dan is een van de twee wortels nul, en dan is q positief semidefiniet (als $r \geq 0$ en $t \geq 0$) of negatief semidefiniet (als $r \leq 0$ en $t \leq 0$).

Voorbeeld 9.1.10. Bekijk de volgende kwadratische vorm in drie veranderlijken:

$$q(x, y, z) = 5x^2 + 9y^2 + 2z^2 + 12xy + 4xz + 6yz$$

of

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Om na te gaan of deze definitief is berekenen we de eigenwaarden van

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

De karakteristieke vergelijking is

$$-\lambda^3 + 16\lambda^2 - 24\lambda + 9 = 0$$

(reken dit zelf na). $\lambda_1 = 1$ is een wortel, en de twee andere wortels zijn de oplossingen van de vergelijking

$$\lambda^2 - 15\lambda + 9 = 0$$

of

$$\lambda_{23} = \frac{15 \pm \sqrt{189}}{2} = \frac{15 \pm 3\sqrt{21}}{2}$$

De drie eigenwaarden zijn dus positief, zodat q definitief positief is. Dit kan men ook nog zien door op te merken dat

$$q(x, y, z) = (x + 2y)^2 + (2x + 2y + z)^2 + (y + z)^2 > 0$$

voor elke $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

9.2 Toepassing: extreme waarden van scalaire functies

Beschouw een willekeurige functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd op een omgeving van een punt A (we zullen de elementen van \mathbb{R}^n voorstellen als kolomvectoren). In [6, §II.2.4] werd het volgende bewezen:

Stelling 9.2.1. *Indien f een lokaal extremum bereikt in $A \in \mathbb{R}^n$, en f differentieerbaar is in A , dan is $\text{grad}f(A) = \vec{0}$, of, anders gezegd,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$$

voor $i = 1, 2, \dots, n$.

Onderstel nu dat A een stationair punt van f is, dit wil zeggen dat $\text{grad}f(A) = \vec{0}$. Hoe kunnen we nu weten of f in A een maximum, een minimum of helemaal geen extremum bereikt? In [6, §II.3.4] werd dit probleem behandeld in de gevallen $n = 1$ en $n = 2$. De volgende resultaten werden bewezen:

$n = 1$

Als f een eindige afgeleide van orde 3 bezit op een omgeving van A , dan geldt:

$$f''(A) > 0 \implies f \text{ bereikt een minimum in } A$$

$$f''(A) < 0 \implies f \text{ bereikt een maximum in } A$$

Als $f''(A) = 0$, dan is er geen besluit.

$n = 2$

Als f continue partiële afgeleiden bezit op een omgeving van A tot op orde minstens 3, dan geldt:

$$s^2 - rt > 0 \implies f \text{ bereikt geen extremum in } A$$

$$s^2 - rt < 0, r < 0 \implies f \text{ bereikt een maximum in } A$$

$$s^2 - rt < 0, r > 0 \implies f \text{ bereikt een minimum in } A$$

Als $s^2 - rt = 0$, dan is er geen besluit.

Hierbij is

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A), t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$$

We gaan dit nu veralgemenen voor functies van n veranderlijken. Onderstel dat A een stationair punt is, en dat f continue partiële afgeleiden bezit tot op orde 3 op een omgeving van A . We schrijven nu de Taylorontwikkeling van f in het punt A op tot op orde 2 en met restterm van orde 3 (zie [6, §II.3.3]):

$$\begin{aligned} f(A+H) &= f(A) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)h_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)h_i h_j \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(A + \theta H)h_i h_j h_k \end{aligned}$$

waarbij $\theta \in]0, 1[$. Omdat A een stationair punt is, valt de lineaire term weg. De kwadratische term

$$q(H) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)h_i h_j$$

is een kwadratische vorm in H (op een factor 2 na). Deze kan herschreven worden als

$$q(H) = H^t B H$$

waarbij

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A) \end{pmatrix}$$

We beschouwen nu verschillende gevallen.

Eerste geval: q is indefiniet

Er bestaan kolomvectoren H_1 en H_2 zodat $q(H_1) > 0$ en $q(H_2) < 0$. Beschouw de functie

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(A + tH_1)$$

Dan is

$$g'_1(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(A + tH_1)h_{1,i}$$

en

$$g'_1(0) = 0$$

zodat 0 een stationair punt is van g_1 . Verder is

$$g''_1(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A + tH_1)h_{1,i}h_{1,j}$$

zodat

$$g''_1(0) = H_1^t B H_1 = q(H_1) > 0$$

g_1 bereikt dus een minimum in 0. Dit betekent dat f een minimum bereikt in A als we H enkel laten variëren in de H_1 -richting.

Beschouw nu

$$g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(A + tH_2)$$

Net zoals voor g_1 vinden we dat $g'_2(0) = 0$ en $g''_2(0) = H_2^t B H_2 = q(H_2) < 0$. g_2 bereikt dus een maximum in 0, en f bereikt een maximum in A als we H enkel laten variëren in de H_2 -richting.

We kunnen dus concluderen dat f geen extremum bereikt in A .

Tweede geval: q is positief definitief

We schrijven nu $H = \rho U$, waarbij $\rho = \|H\|$ en U een eenheidsvector. We kunnen nu schrijven

$$\begin{aligned} f(A + H) - f(A) &= \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) u_i u_j \\ &\quad + \frac{\rho^3}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(A + \theta H) u_i u_j u_k \\ &= \frac{\rho^2}{2} (q(U) + \frac{\rho}{3} \beta(H)) \end{aligned}$$

Stel nu

$$\Gamma = \{U \in \mathbb{R}^n \mid \|U\| = 1\}$$

De functie

$$q : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+ : U \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) u_i u_j = q(U)$$

is continu. Γ is een gebied in \mathbb{R}^n (gesloten, begrensd en boogsamenhangend), en dus bereikt q een minimum op Γ (zie [6, §I.4.3]). Omdat q uitsluitend positieve waarden aanneemt op Γ , is de bereikte minimumwaarde strikt positief. Stel

$$q_0 = \min\{q(U) \mid U \in \Gamma\} > 0$$

β is een continue functie, gedefinieerd op een omgeving van A . Beperk β tot een gesloten bol V met middelpunt A en straal r , volledig binnen deze omgeving gelegen. Dan bereikt $|\beta|_V$ een maximum, dit volgt weer uit [6, §I.4.3]. Stel

$$m = \max\{|\beta(H)| : H \in V\}$$

Voor $\|H\| < r$ vinden we dat

$$f(A+H) - f(A) = \frac{\rho^2}{2}(q(U) + \frac{\rho}{3}\beta(H))$$

Voor $\|H\| < \min\{3q_0/m, r\}$ geldt dus dat $f(A+H) > f(A)$ en f bereikt een minimum in A .

Derde geval: q is negatief definitief

Op analoge wijze vinden we nu dat f een maximum bereikt in A .

Vierde geval: q is positief semidefiniet

Er bestaat een $H_1 \neq 0$ zodanig dat $q(H_1) = 0$. Dan geldt dat

$$f(A+tH_1) - f(A) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(A + \theta t H_1) t^3 h_{1,i} h_{1,j} h_{1,k}$$

en over het teken hiervan weten we niets. We kunnen dus geen enkel besluit trekken. In dit geval kan f in A zowel een minimum bereiken als geen extremum. Dit blijkt uit de volgende voorbeelden:

- 1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4$. $(0, 0, 0)$ is een stationair punt, en $q(x, y, z) = x^2 + y^2$ is positief semidefiniet. f bereikt een minimum in $(0, 0, 0)$.
- 2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$. $(0, 0, 0)$ is een stationair punt, en $q(x, y, z) = x^2 + y^2$ is positief semidefiniet. f bereikt geen extremum in $(0, 0, 0)$.

Vijfde geval: q is negatief semidefiniet

Net als in het vorige geval is er geen besluit.

We kunnen bovenstaande resultaten als volgt samenvatten.

Stelling 9.2.2. *Onderstel dat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ een scalaire functie is die continue partiële afgeleiden tot op orde minstens 3 bezit op een omgeving van het punt A . Onderstel ook dat A een stationair punt is van de functie f :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$$

voor $i = 1, \dots, n$. We beschouwen de kwadratische vorm q gegeven door de formule $q(H) = H^t B H$, waarbij B de $n \times n$ -matrix is met de tweede partiële afgeleide

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)$$

in de (i, j) -positie.

Als q indefiniet is, dan bereikt f geen extremum in A ;

als q positief definiet is, dan bereikt f een minimum in A ;

als q negatief definiet is, dan bereikt f een maximum in A ;

als q semidefiniet is, dan is er geen besluit.

Voorbeeld 9.2.3. We beschouwen de functie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y, z) = -89x + 4y + 6z - 7x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz + x^3$$

De stationaire punten worden gevonden door het volgende stelsel vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{cases} -89 - 14x + 4y + 6z + 3x^2 = 0 \\ 4 + 4y + 4x = 0 \\ 6 + 6z + 6x = 0 \end{cases}$$

Uit de tweede en de derde vergelijking volgt onmiddellijk dat

$$y = z = -x - 1$$

Substitutie in de eerste vergelijking levert

$$x^2 - 8x - 33 = 0$$

zodat $x = \frac{8 \pm \sqrt{196}}{2} = 4 \pm 7$. De twee stationaire punten zijn dus

$$(11, -12, -12) \text{ en } (-3, 2, 2)$$

We onderzoeken nu of het hier gaat om een maximum, minimum of geen extremum.

1) $x = 11$. De matrix B wordt nu

$$B = \begin{pmatrix} 52 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

zodat

$$q(x, y, z) = 52x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 8xy + 12xz$$

Merk op dat

$$\begin{aligned} (4x + y)^2 &= 16x^2 + y^2 + 8xy \\ (3x + 2z)^2 &= 9x^2 + 4z^2 + 12xz \end{aligned}$$

zodat

$$q(x, y, z) = (4x + y)^2 + (3x + 2z)^2 + 27x^2 + 3y^2 + 2z^2$$

positief definiet is. In $(11, -12, -12)$ bereikt f dus een minimum.

2) $x = -3$. De matrix A wordt nu

$$A = \begin{pmatrix} -32 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

zodat

$$q(x, y, z) = -32x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 8xy + 12xz$$

Aangezien

$$q(0, 1, 1) = 10 > 0 \text{ en } q(1, 0, 0) = -32 < 0$$

is q indefiniet, en f bereikt geen extremum in $(-3, 2, 2)$.

9.3 Kwadratische functies en kwadrieken

Beschouw een n -dimensionale Euclidische ruimte E . We leggen een orthonormale basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ vast. Voor $\vec{x} \in E$ schrijven we

$$[\vec{x}]_B = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Een functie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ noemen we een **kwadratische functie** als f kan geschreven worden onder de vorm

$$f(\vec{x}) = q(\vec{x}) + 2g(\vec{x}) + c \tag{9.5}$$

waarbij

- $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ een kwadratische vorm is; we noteren b voor de symmetrische bilineaire vorm waaraan q geassocieerd is;
- $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding is;
- $c \in \mathbb{R}$.

Net zoals in de vorige paragrafen schrijven we voor A de matrix met elementen $a_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. B is de rijvector met elementen $b_i = g(\vec{e}_i)$, of, m.a.w., $B = [g]_{\{1\}, B}$. (9.5) kan nu herschreven worden als

$$f(\vec{x}) = X^t A X + 2B X + c \tag{9.6}$$

Definitie 9.3.1. Een **kwadriek** \mathcal{K} in E is de nulpuntenverzameling van een kwadratische functie f

$$\mathcal{K} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = 0\}$$

In deze paragraaf zullen we kwadrieken op isometrie na bestuderen. Hoe kunnen we de vergelijking van een kwadriek \mathcal{K} zo eenvoudig mogelijk schrijven, als we een nieuwe orthonormale basis, en een nieuwe oorsprong mogen kiezen? Uit § 9.1 weten we dat er een orthogonale matrix M bestaat zodat

$$M^t A M = D$$

een diagonaalmatrix is. Stel nu $X = MY$ (of $Y = M^t X$). Dan is

$$Y = [\vec{x}]_U$$

met $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ en $\vec{u}_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} \vec{e}_j$. Bovendien is

$$q(\vec{x}) = Y^t M^t A M Y = Y^t D Y = \sum_{i=1}^n d_{ii} y_i^2$$

en

$$f(\vec{x}) = Y^t D Y + 2 B M Y + c = Y^t D Y + 2 \tilde{B} Y + c$$

We gebruiken nu dezelfde notatie als in § 9.1:

- $1 \leq k \leq s \implies d_{kk} = \alpha_k^2 > 0$;
- $s < k \leq d \implies d_{kk} = -\beta_k^2 < 0$;
- $k > d \implies d_{kk} = 0$.

Voor $k \leq d$ kunnen we schrijven

$$d_{kk} y_k^2 + 2 \tilde{b}_k y_k = d_{kk} \left(y_k + \frac{\tilde{b}_k}{d_{kk}} \right)^2 - \frac{\tilde{b}_k^2}{d_{kk}}$$

Voor $k = 1, \dots, d$ stellen we

$$z_k = y_k + \frac{\tilde{b}_k}{d_{kk}}$$

We krijgen nu

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^d d_{kk} z_k^2 + \sum_{l=d+1}^n 2 \tilde{b}_l y_l + \tilde{c}$$

Schrijf zelf neer wat \tilde{c} is. We beschouwen nu twee gevallen.

Eerste geval: De lineaire term is nul, met andere woorden

$$\tilde{b}_{d+1} = \dots = \tilde{b}_n = 0$$

We stellen $z_l = y_l$ voor $l = d+1, \dots, n$. We hebben dan dat

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^d d_{kk} z_k^2 + \tilde{c}$$

en de vergelijking van de kwadriek kan geschreven worden onder de vorm

$$\alpha_1^2 z_1^2 + \dots + \alpha_s^2 z_s^2 - \beta_{s+1}^2 z_{s+1}^2 - \dots - \beta_d^2 z_d^2 + \tilde{c} = 0 \quad (9.7)$$

Tweede geval: De lineaire term is niet nul.

We werken nu even in de Euclidische ruimte \mathbb{R}^{n-d} . We zullen de elementen van \mathbb{R}^{n-d} voorstellen door overlijnde hoofdletters, en we laten de indexen van de coördinaten lopen van $d+1$ tot n . We zullen dus bijvoorbeeld schrijven

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_{d+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Stel

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 2\tilde{b}_{d+1} \\ \vdots \\ 2\tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

en

$$\bar{E}_{d+1} = \bar{B}/\|\bar{B}\|$$

Vul $\{\bar{E}_{d+1}\}$ aan tot een orthonormale basis $\{\bar{E}_{d+1}, \bar{E}_{d+2}, \dots, \bar{E}_n\}$ van \mathbb{R}^{n-d} . De matrix

$$\bar{M} = (\bar{E}_{d+1} \quad \bar{E}_{d+2} \quad \cdots \quad \bar{E}_n)$$

is een orthogonale matrix. We voeren nu de volgende orthogonale coördinatentransformatie uit:

$$\bar{T} = \bar{M}^t \bar{Y} \quad \text{en} \quad \bar{Y} = \bar{M} \bar{T}$$

We noteren

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} t_{d+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

De lineaire term van f kunnen we nu herschrijven als

$$\sum_{l=d+1}^n 2\tilde{b}_l y_l = \bar{B}^t \bar{Y} = \|\bar{B}\| \bar{E}_{d+1}^t \bar{M} \bar{T} = \|\bar{B}\| t_{d+1}$$

Immers,

$$\bar{E}_{d+1}^t \bar{M} = (\bar{E}_{d+1}^t \bar{E}_{d+1} \quad \bar{E}_{d+1}^t \bar{E}_{d+2} \quad \cdots \quad \bar{E}_{d+1}^t \bar{E}_n) = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$$

We voeren tenslotte een laatste verschuiving uit:

$$z_{d+1} = t_{d+1} + \frac{\tilde{c}}{\|\bar{B}\|}$$

De lineaire en constante term van f tezamen geteld geven dan

$$\|\bar{B}\| t_{d+1} + \tilde{c} = \|\bar{B}\| z_{d+1}$$

en we vinden tenslotte

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^d d_{kk} z_k^2 + \|\bar{B}\| z_{d+1}$$

Als we $\gamma = \|\bar{B}\|$ noteren, dan kunnen we de vergelijking van de kwadriek schrijven onder de vorm

$$\alpha_1^2 z_1^2 + \cdots + \alpha_s^2 z_s^2 - \beta_{s+1}^2 z_{s+1}^2 - \cdots - \beta_d^2 z_d^2 + \gamma z_{d+1} = 0 \quad (9.8)$$

We kunnen de bovenstaande resultaten samenvatten als volgt:

Stelling 9.3.2. *Zij E een n -dimensionale Euclidische ruimte, en $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ een kwadratische functie. Na een geschikte keuze van de oorsprong en van een orthonormale basis kan men de vergelijking van de kwadriek*

$$f(\vec{x}) = 0$$

*herschrijven onder de vorm (9.7) of (9.8). Men noemt (9.7) of (9.8) de (**Euclidische**) **standaard-vergelijking** van de kwadriek.*

We zullen nu stelling 9.3.2 gebruiken om de kwadrieken in het twee- en driedimensionaal geval te klasseren. Een kwadriek in \mathbb{R}^2 noemt men ook een **kegelsnede**.

Classificatie van de kegelsneden

We werken in een tweedimensionale Euclidische ruimte E . In dit geval is $n = 2$. Voor de eenvoud vervangen we de veranderlijken z_1 en z_2 opnieuw door x en y . We onderscheiden twee gevallen: $d = 1$ en $d = 2$.

eerste geval: $d = 2$.

1.1: $s = 2$

De vergelijking (9.7) wordt dan

$$\alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 y^2 + \tilde{c} = 0 \quad (9.9)$$

Hier zijn drie mogelijke deelgevallen te onderscheiden.

1.1.a $\tilde{c} < 0$. (9.9) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dit is de vergelijking van een **ellips**

1.1.b $\tilde{c} = 0$. De enige oplossing van (9.9) is het punt $(0, 0)$.

1.1.c $\tilde{c} > 0$. (9.9) heeft geen enkele oplossing.

1.2: $s = 1$

De vergelijking (9.7) wordt nu

$$\alpha_1^2 x^2 - \beta_2^2 y^2 + \tilde{c} = 0 \quad (9.10)$$

Er zijn weer drie deelgevallen te onderscheiden.

1.2.a $\tilde{c} < 0$. (9.10) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dit is de vergelijking van een **hyperbool**

1.2.b $\tilde{c} = 0$. (9.10) wordt nu

$$\alpha_1^2 x^2 - \beta_2^2 y^2 = 0$$

of

$$(\alpha_1 x + \beta_2 y)(\alpha_1 x - \beta_2 y) = 0$$

Dit is de vergelijking van twee rechten die mekaar snijden in $(0, 0)$.

1.2.c $\tilde{c} > 0$. (9.10) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Dit is weer de vergelijking van een *hyperbool*. We kunnen geval 1.2.c trouwens herleiden tot 1.2.a door x en y om te wisselen.

1.3: $s = 0$

Dit levert niets nieuws op. Als we de vergelijking van de kegelsnede herschrijven als $-f(\vec{x}) = 0$, dan zijn we opnieuw in het geval $s = 2$.

Tweede geval: $d = 1$.

2.1: De lineaire term van de vergelijking is nul. (9.7) wordt nu

$$\alpha_1^2 x^2 + \tilde{c} = 0 \tag{9.11}$$

Er zijn weer drie deelgevallen:

2.1.a $\tilde{c} < 0$. De vergelijking wordt

$$x = \pm \sqrt{-\tilde{c}} / \alpha_1$$

Dit zijn twee evenwijdige rechten.

2.1.b $\tilde{c} = 0$. De vergelijking wordt

$$x^2 = 0$$

Dit zijn twee samenvallende rechten.

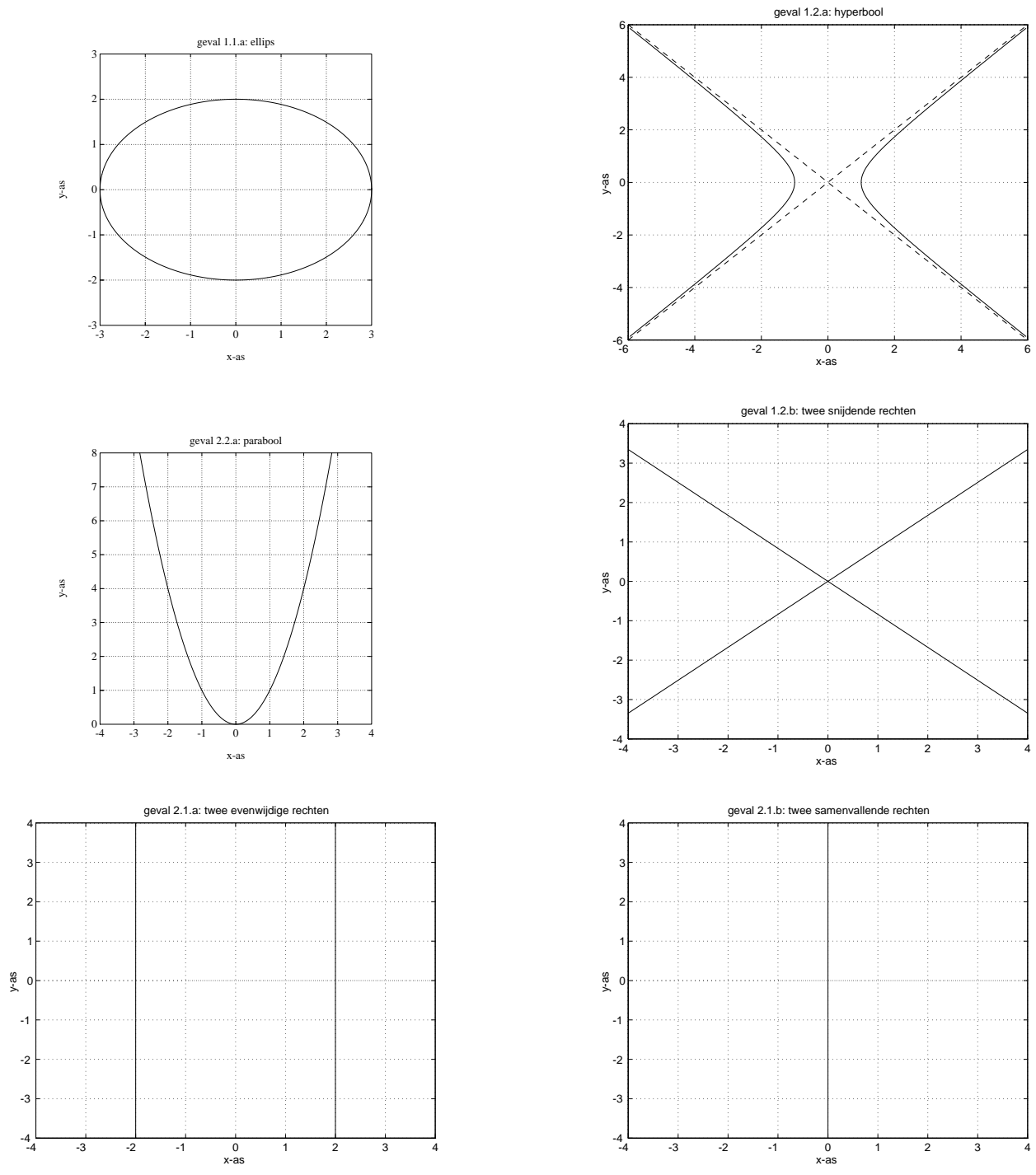
2.1.c $\tilde{c} > 0$. (9.11) heeft geen oplossingen.

2.2: De lineaire term van de vergelijking is niet nul. (9.8) wordt nu

$$x^2 + \gamma y = 0 \tag{9.12}$$

Dit is de vergelijking van een **parabool**.

Een grafische voorstelling van deze kegelsneden vind je in figuur Figuur 9.1.



Figuur 9.1: De kegelsneden

Classificatie van de kwadrieken in \mathbb{R}^3

We werken in een driedimensionale Euclidische ruimte E . In dit geval is $n = 3$. Voor de eenvoud vervangen we de veranderlijken z_1, z_2 en z_3 door x, y en z . We onderscheiden drie gevallen: $d = 1$, $d = 2$ en $d = 3$.

eerste geval: $d = 3$.

1.1: $s = 3$

De vergelijking (9.7) wordt nu

$$\alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 y^2 + \alpha_3^2 z^2 + \tilde{c} = 0 \quad (9.13)$$

Hier zijn drie mogelijke deelgevallen te onderscheiden.

1.1.a $\tilde{c} < 0$. (9.13) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dit is de vergelijking van een **ellipsoïde**. De doorsnede met een vlak evenwijdig met een van de coördinaatvlakken is ofwel leeg ofwel een ellips. Neem bijvoorbeeld de doorsnede met het vlak met vergelijking $z = d$. De doorsnede is de kromme met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{d^2}{c^2}$$

en dit is een ellips als $|d| \leq |c|$. Indien $|d| > |c|$ is de doorsnede leeg. Het is dan ook niet moeilijk om in te zien dat de grafiek van de kwadriek eruit ziet als een rugbybal (een gewone voetbal indien $a = b = c$), zoals geschetst Figuur 9.2. Merk ook op dat de ellipsoïde in parametervorm kan geschreven worden als volgt:

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi \\ y = b \sin \theta \sin \varphi \\ z = c \cos \theta \end{cases}$$

1.1.b $\tilde{c} = 0$. De enige oplossing van (9.13) is het punt $(0, 0, 0)$.

1.1.c $\tilde{c} > 0$. (9.13) heeft geen enkele oplossing.

1.2 $s = 2$

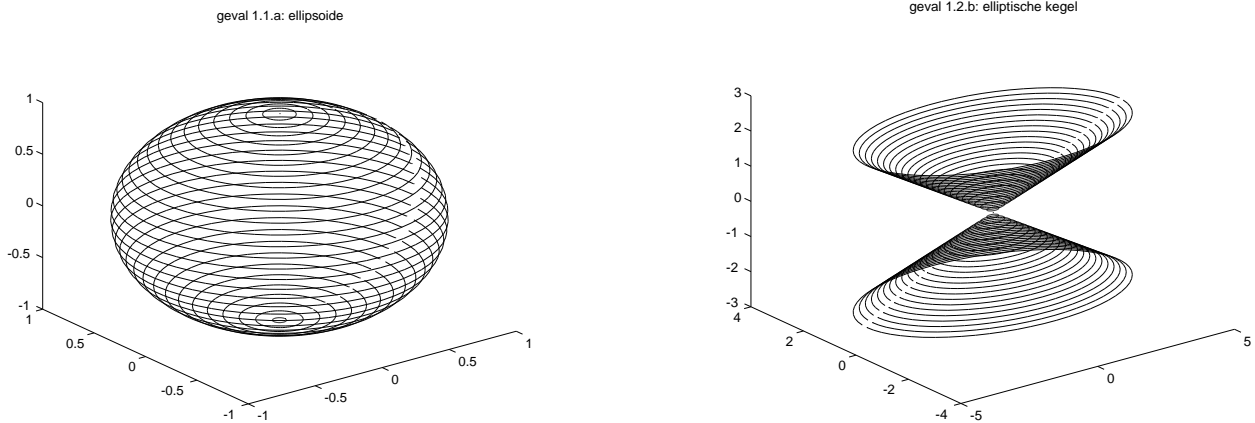
De vergelijking (9.7) wordt nu

$$\alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 y^2 - \beta_3^2 z^2 + \tilde{c} = 0 \quad (9.14)$$

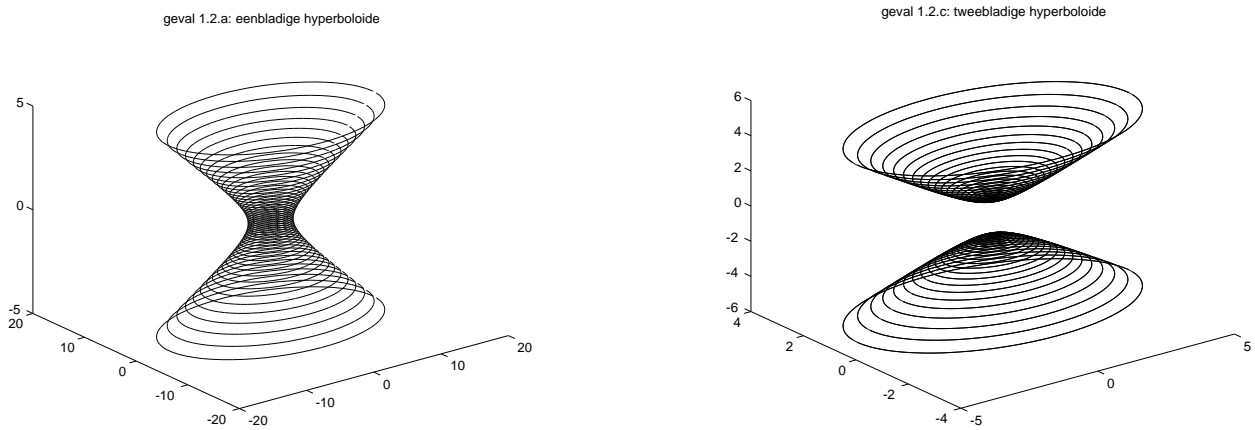
Er zijn weer drie deelgevallen te onderscheiden.

1.2.a $\tilde{c} < 0$. (9.14) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Figuur 9.2: De ellipsoïde en de kegel



Figuur 9.3: De eenbladige en de twebladige hyperboloïde

Dit is de vergelijking van een **eenbladige hyperboloïde**.

Om te zien hoe de grafiek eruitziet merken we op dat de doorsnede met een horizontaal vlak $z = d$ volgende vergelijking heeft:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{d^2}{c^2}$$

en dit is een ellips. De doorsnede met het xz -vlak is de hyperbool met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Op analoge manier zien we dat de doorsnede met elk verticaal vlak door de oorsprong een hyperbool is. De grafiek van de eenbladige hyperboloïde wordt geschetst in Figuur 9.3. In parameterform kunnen we de vergelijking van de eenbladige hyperboloïde als volgt herschrijven¹:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} v \cos \varphi \\ y = b \operatorname{ch} v \sin \varphi \\ z = c \operatorname{sh} v \end{cases}$$

¹Appendix A bevat een korte herhaling over hyperbolische functies.

1.2.b $\tilde{c} = 0$. (9.14) wordt nu

$$\alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 y^2 - \beta_3^2 z^2 = 0$$

of

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Dit is de vergelijking van een **elliptische kegel**. Immers, de doorsnede met een horizontaal vlak $z = d$ is de ellips met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2}$$

terwijl de doorsnede met een verticaal vlak $y = mx$ bestaat uit twee rechten die elkaar snijden in de oorsprong:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

of

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}x + \frac{z}{c}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}x - \frac{z}{c}\right) = 0$$

De grafiek van de elliptische kegel wordt geschetst in Figuur 9.1. Een stel parametervergelijkingen is bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b r \sin \varphi \\ z = cr \end{cases}$$

1.2.c $\tilde{c} > 0$. (9.9) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

De doorsnede met het horizontaal vlak $z = d$ is de ellips met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2} - 1$$

indien $|d| \geq |c|$. Als $|d| < |c|$ is deze doorsnede leeg. De doorsnede met het verticale vlak $y = mx$ heeft als vergelijking

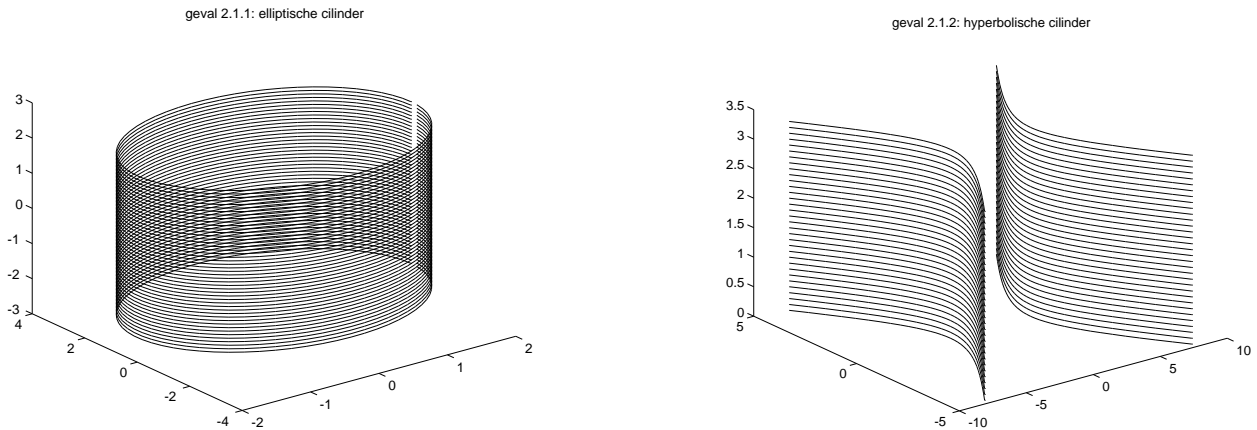
$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

en is een hyperbool. Men noemt dit type kwadriek een **tweebladige hyperboloïde**. Een stel parametervergelijkingen van de tweebladige hyperboloïde is bijvoorbeeld

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sh} v \cos \varphi \\ y = b \operatorname{sh} v \sin \varphi \\ z = c \operatorname{ch} v \end{cases}$$

1.3 $s = 1$

Dit levert niets nieuws op. Als we de vergelijking van de kwadriek herschrijven als $-f(\vec{x}) = 0$,



Figuur 9.4: De elliptische en de hyperbolische cilinder

dan zijn we opnieuw in het geval $s = 2$.

1.4 $s = 0$

Dit levert niets nieuws op. Als we de vergelijking van de kwadriek herschrijven als $-f(\vec{x}) = 0$, dan zijn we opnieuw in het geval $s = 3$.

tweede geval: $d = 2$.

2.1 de lineaire term is nul. (9.7) neemt nu volgende vorm aan

$$d_{11}x^2 + d_{22}y^2 + \tilde{c} = 0$$

Alnaargelang de tekens van d_{11} , d_{22} en \tilde{c} kunnen we de vergelijking herschrijven in een van de volgende vormen:

2.1.1 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dit is de vergelijking van een **elliptische cilinder** (zie Figuur 9.4 voor de grafiek). Een stel parametervergelijkingen is bijvoorbeeld

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

2.1.2 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dit is de vergelijking van een **hyperbolische cilinder**. (zie Figuur 9.4 voor de grafiek). Een stel parametervergelijkingen is bijvoorbeeld

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \\ z = z \end{cases}$$

2.1.3 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$. De vergelijking heeft dan geen oplossingen, en de kwadriek is leeg.

2.1.4 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. De kwadriek bestaat nu uit de z -as.

2.1.5 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, of

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

Dit zijn twee snijdende vlakken.

2.2 de lineaire term is niet nul.

2.2.1 $s = 2$. (9.8) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

De doorsnede met het horizontaal vlak $z = d$ is een ellips als $d \geq 0$ en leeg als $d < 0$. De doorsnede met het verticaal vlak $y = mx$ is de parabool met vergelijking

$$z = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2$$

We noemen deze kwadriek een **elliptische paraboloid**. (zie Figuur 9.5). We geven ook weer een stel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b r \sin \varphi \\ z = r^2 \end{cases}$$

2.2.2 $s = 1$. (9.8) kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

De doorsnede met het horizontale vlak $z = c$ is dan de hyperbool met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c$$

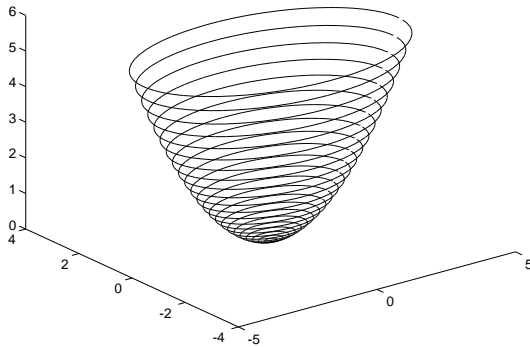
De doorsnede met het xy -vlak $z = 0$ bestaat uit twee rechten die mekaar snijden in de oorsprong:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

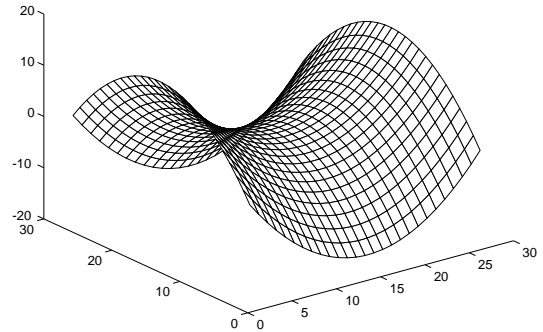
De doorsnede met het xz -vlak $y = 0$ is de parabool met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} = z$$

geval 2.2.1: elliptische paraboloid



geval 2.2.2: hyperbolische paraboloid of zadeloppervlak



Figuur 9.5: De elliptische en de hyperbolische paraboloiden

Dit is een parabool met als top de oorsprong, en de top is een minimum. De doorsnede met het yz -vlak $x = 0$ is de parabool met vergelijking

$$-\frac{y^2}{b^2} = z$$

Dit is een parabool met als top de oorsprong, en de top is een maximum. Op het eerste zicht is het moeilijk om al deze gegevens in een grafiek met mekaar te verenigen. Dit type kwadriek is dan ook hetgene dat het moeilijkst is om te tekenen. De grafiek wordt geschetst in Figuur 9.5. We noemen een kwadriek van dit type een **hyperbolische paraboloid** of **zadeloppervlak**. Een stel parametervergelijkingen is bijvoorbeeld

$$\begin{cases} x = a \operatorname{arch} \varphi \\ y = b r \operatorname{sh} \varphi \\ z = r^2 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x = a \operatorname{arsh} \varphi \\ y = b r \operatorname{ch} \varphi \\ z = -r^2 \end{cases}$$

derde geval: $d = 1$.

3.1: de lineaire term is nul. (9.7) neemt nu volgende vorm aan

$$d_{11}x^2 + \tilde{c} = 0$$

3.1.1 $d_{11}\tilde{c} < 0$. De vergelijking wordt

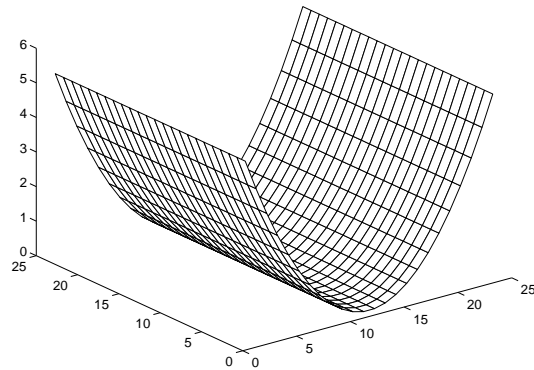
$$x = \pm \sqrt{-\frac{\tilde{c}}{d_{11}}}$$

De kwadriek bestaat uit twee evenwijdige vlakken.

3.1.2 $d_{11}\tilde{c} > 0$. De kwadriek is leeg.

3.1.3 $\tilde{c} = 0$. De vergelijking wordt nu $x^2 = 0$, en de kwadriek bestaat uit twee samenvallende vlakken.

geval 3.1: parabolische cilinder



Figuur 9.6: De parabolische cilinder

3.1 de lineaire term is verschillend van nul.

$$d_{11}x^2 + \gamma y = 0$$

is de vergelijking van een **parabolische cilinder** (zie Figuur 9.6).

Bijlage A

Hyperbolische functies

Wanneer je de goniometrische functies (sin, cos, enz.) bestudeert op complexe getallen (zie cursus “Complex Analysis” volgend jaar), kom je snel tot de conclusie dat deze functies nauw verbonden zijn met de exponentiële functie. Dit leidt, in het reële geval, tot volgende nuttige functies:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{ch}x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

De eerste functie noemt men de **sinus hyperbolicus** van x en de tweede de **cosinus hyperbolicus**. Het is duidelijk dat deze functies gedefinieerd zijn op heel \mathbb{R} .

Je zal gemakkelijk narekenen dat $\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$. Dit is een eigenschap die lijkt op het bekende $\cos^2x + \sin^2x = 1$ bij goniometrische functies. Er zijn nog gelijknissen die we hier achterwege laten maar die de (eerste helft van de) naam van deze hyperbolische functies verklaren. Er bestaan ook *tangens hyperbolicus*, *cotangens hyperbolicus*, *secans hyperbolicus*, ... Deze functies verschijnen in verschillende takken van de wiskunde en zijn van groot belang bij het uitdrukken van oplossingen van sommige differentiaalvergelijkingen.

Uit het verband $\cos^2x + \sin^2x = 1$ voor goniometrische functies volgt dat de punten met coördinaten $(\cos t, \sin t)$ op de eenheidscirkel¹ met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ liggen, voor alle waarden van $t \in \mathbb{R}$. We zeggen dat

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

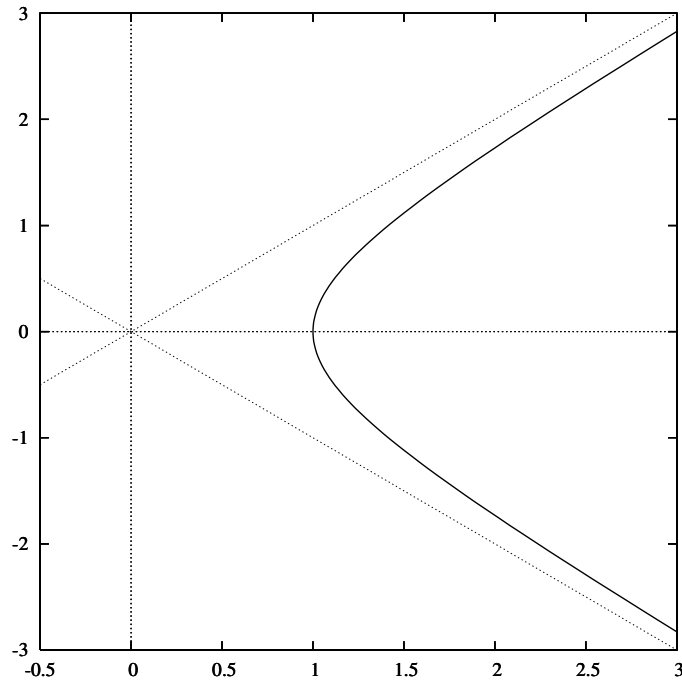
een *parametrische beschrijving* (of **parametervoorstelling**) is van de eenheidscirkel. We geven hier inderdaad uitdrukkingen voor x en y in functie van de parameter $t \in \mathbb{R}$.

Voor de hyperbolische functies geldt $\operatorname{ch}^2t - \operatorname{sh}^2t = 1$. Als we dus stellen

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch}t \\ y = \operatorname{sh}t \end{cases},$$

¹Merk op dat dit enkel een echte cirkel is in een orthonormaal assenkruis. In een algemeen assenkruis krijgen we eerder een ellips.

krijgen we de parametervoorstelling van de punten met coördinaten (cht, sht) . We zien dat deze punten liggen op een kromme met vergelijking $x^2 - y^2 = 1$. Dit is de vergelijking van een *hyperbool*. Dit verklaart meteen ook waarom we deze functies *hyperbolisch* noemen. Merk op dat we alleen de rechtse tak van de hyperbool bekomen daar $cht > 0$, voor elke $t \in \mathbb{R}$.



Figuur A.1: Grafiek van de kromme (cht, sht) . Voor de duidelijkheid zijn ook de asymptoten getekend.

Oefeningen

Reeks 9

Oefening 9.1. Bepaal de karakteristieke veelterm, de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix A . Is de matrix A diagonaliseerbaar?

a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & -7 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oefening 9.2. Schrijf de karakteristieke veelterm van de matrices en verifieer de formule van Cayley-Hamilton.

a

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Oefening 9.3. Onderstel dat A een reguliere matrix is met karakteristieke veelterm

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$$

Toon aan dat

$$A^{-1} = \frac{1}{a_n}((-1)^{n-1}A^{n-1} - a_1A^{n-2} - \dots - a_{n-1}I)$$

en

$$\text{adj}(A) = (-1)^{n-1}A^{n-1} - a_1A^{n-2} - \dots - a_{n-1}I,$$

waarbij I de eenheidsmatrix is met zelfde afmetingen als A .

Oefening 9.4.a V is de deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ met basis $\{e^u, e^{-u}\}$. Zoek een basis van V waarin de matrix van de lineaire afbeelding

$$D: V \rightarrow V: f \mapsto Df = f'$$

diagonaal wordt.

Oefening 9.4.b V is de deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ met basis $\{\cos x, \sin x\}$. Zoek een basis van V waarin de matrix van de lineaire afbeelding

$$L: V \rightarrow V: f \mapsto 2f + f''$$

diagonaal wordt.

Oefening 9.4.c V is de deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ met basis $\{\cos x, \sin x\}$. Bestaat er een basis van V waarin de matrix van de lineaire afbeelding

$$D^3: V \rightarrow V: f \mapsto f'''$$

diagonaal wordt?

Oefening 9.5.a Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zoek een matrix M waarvoor $M^{-1}AM$ een diagonaalmatrix is, en gebruik dit om op een eenvoudige manier A^9 uit te rekenen.

Oefening 9.5.b Beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zoek een matrix M waarvoor $M^{-1}BM$ een diagonaalmatrix is, en gebruik dit om op een eenvoudige manier B^{16} uit te rekenen.

Oefening 9.5.c Beschouw de matrix

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zoek een matrix M waarvoor $M^{-1}CM$ een diagonaalmatrix is, en gebruik dit om op een eenvoudige manier C^{31} uit te rekenen.

Oefening 9.6. Onderstel dat $f, g : V \rightarrow V$ twee lineaire afbeeldingen zijn, en dat er een basis E van V bestaat waarin de matrices van zowel f als g diagonaal worden. Toon aan dat dan noodzakelijkerwijze geldt dat

$$f \circ g = g \circ f$$

m.a.w. f en g commuteren.

Oefening 9.7. Zoek een basis van \mathbb{R}^n waarin de volgende matrices diagonaal worden:

a

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oefening 9.8.

a Zoek een basis van \mathbb{R}^3 waarin de matrix van de lineaire afbeelding bepaald door linksvermenigvuldiging met

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

een bovendriehoeksmatrix wordt.

b Zoek een basis van \mathbb{R}^3 waarin de matrix van de lineaire afbeelding bepaald door linksvermenigvuldiging met

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

een bovendriehoeksmatrix wordt.

- c Zoek een basis van \mathbb{R}^3 waarin de matrix van de lineaire afbeelding bepaald door linksvermenigvuldiging met

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

een bovendriehoeksmatrix wordt.

Oefening 9.9. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a Is A diagonaliseerbaar over \mathbb{R} ? Zo ja, bepaal dan een reguliere matrix P zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is. Zo niet, triangulariseer hem dan indien dit wel mogelijk is. Motiveer telkens je antwoorden.
- b Is A diagonaliseerbaar over \mathbb{C} ? Zo ja, bepaal dan een reguliere matrix P zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is. Zo niet, triangulariseer hem dan.

Oefening 9.10 (Examenvraag 2006).

- (a) Toon aan dat als D een reële diagonaalmatrix is met niet-negatieve elementen op de hoofd-diagonaal, er een matrix S bestaat zodat $S^2 = D$.
- (b) Toon aan dat als A een reële, diagonaliseerbare matrix is met niet-negatieve eigenwaarden, er een matrix T bestaat zodat $T^2 = A$.
- (c) Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

vind een matrix T zodat $T^2 = A$.

Oefening 9.11 (Examenvraag 2011). Beschouw volgend element van $M_{2,2}(\mathbb{C})$, waarbij $p, q, r, s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} p & q + ri \\ q - ri & s \end{pmatrix}$$

Toon aan dat deze matrix diagonaliseerbaar is en dat de eigenwaarden noodzakelijk reëel zijn. Doe dit door de karakteristieke veelterm uit te rekenen.

Oefening 9.12 (Examenvraag 2012). Voor $m \in \mathbb{R}$, beschouw volgende matrix:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

- (a) Voor welke waarde(n) van m is S niet inverteerbaar?
- (b) Voor welke waarde(n) van m heeft S uitsluitend reële eigenwaarden?
- (c) Voor welke waarde(n) van m bevat S een eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2?
- (d) Stel nu $m = 8$. Diagonaliseer S .

Oefening 9.13 (Examenvraag 2012). Beschouw \mathbb{C} als 2-dimensionale \mathbb{R} -vectorruimte en beschouw de afbeelding f , gedefinieerd als volgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}; \\ a + bi &\mapsto a - bi, \end{aligned}$$

waarbij $a, b \in \mathbb{R}$.

Zijn de volgende beweringen juist of fout? Verklaar grondig je antwoord. Indien de bewering juist is, bewijs; zoniet, geef tegenvoorbeeld.

- (a) f is een \mathbb{R} -lineaire afbeelding.
- (b) $\det(f) = 0$.
- (c) f is diagonaliseerbaar.

Oefening 9.14 (Examenvraag 2013). Zij

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

waarbij $p \in \mathbb{R}$. De eigenruimte behorende bij een eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ van A_p noteren we E_λ .

- (a) Bewijs dat, indien $p \neq 0$, A_p steeds 2 verschillende negatieve reële eigenwaarden heeft.
- (b) Bewijs dat, indien $p \neq 0$, $\dim(E_1) = \dim(E_{-1}) = 1$. Geef een basis van E_1 in dit geval.
- (c) Zij nu $p = 0$. Bepaal $\dim(E_1)$ en $\dim(E_{-1})$. Geef een basis van E_{-1} in dit geval.

Reeks 10

Oefening 10.1. Welk van de volgende formules definieert een inwendig product op de vectorruimte \mathbb{R}^2 ? We noteren $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2)$.

1a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1$;

1b $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$;

1c $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 - 3x_2 y_2$;

2a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$;

2b $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + x_2 y_2$;

2c $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -2x_1 y_1 - 3x_2 y_2$;

3a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x_1 y_1)^2 + (x_2 y_2)^2$;

3b $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 4x_2 y_2$;

3c $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 + x_2$.

Oefening 10.2. Beschouw de vectorruimte

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continu over } [a, b]\}$$

en een continue functie

$$w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

die overall niet-negatieve waarden aanneemt, en in ten hoogste een eindig aantal punten nul is. Toon aan dat

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

een inwendig product op $\mathcal{C}[a, b]$ definieert. De functie $w(x)$ wordt de gewichtsfunctie genoemd.

Oefening 10.3. Bereken de volgende inwendige producten

1a $\langle (1, 2), (3, 4) \rangle$ in \mathbb{R}^2 met het standaard inwendig product;

1b $\langle (-7, 3), (2, 5) \rangle$ in \mathbb{R}^2 met het inwendig product $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$;

1c $\langle (2, -1), (3, 2) \rangle$ in \mathbb{R}^2 met het inwendig product $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4x_1 y_1 + 6x_2 y_2$;

2a $\langle \cos nx, \cos mx \rangle$ in $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ met het inwendig product uit oefening 10.2 met gewichtsfunctie $w(x) = 1$ ($n, m \in \mathbb{N}$);

2b $\langle x^2, x^3 + 1 \rangle$ in $\mathcal{C}[-1, 1]$ met het inwendig product uit oefening 10.2 met gewichtsfunctie $w(x) = 1$;

2c $\langle 1 - 2x, e^{-x} \rangle$ in $\mathcal{C}[0, 1]$ met het inwendig product uit oefening 10.2 met gewichtsfunctie $w(x) = e^x$.

Oefening 10.4. Herneem oefening 3. Bepaal telkens de cosinus van de hoek tussen het gegeven koppel vectoren.

Oefening 10.5. Toon dat de formule

$$\langle P, Q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

voor $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $Q(X) = \sum_{i=0}^n b_i X^i \in \mathbb{R}_n[X]$ een inwendig product definieert op de vectorruimte $\mathbb{R}_n[X]$.

Oefening 10.6. Gebruik de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz om aan te tonen dat voor elke $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0$ geldt

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right) \geq n^2.$$

Oefening 10.7. Toon aan dat in elke Euclidische ruimte E

$$\|\vec{x} \pm \vec{y}\| \geq \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right|.$$

Oefening 10.8. Gebruik het Gram-Schmidt procédé om de gegeven basis van \mathbb{R}^3 om te zetten tot een orthonormale basis van \mathbb{R}^3 , met standaard inwendig product.

a $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$;

b $\{(1, 0, 0), (3, 7, -2), (0, 4, 1)\}$;

c $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Oefening 10.9.a Beschouw de Euclidische ruimte $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ van oefening 10.2 met $w(x) = 1$ voor alle $x \in [-\pi, \pi]$. Zet het stel vectoren $\{1, x, x^2, x^3\}$ om in een orthogonaal stel, met behulp van het Gram-Schmidt procédé.

Zoek de orthogonale projectie van de functie $y = \cos(x)$ op de vectorruimte voortgebracht door $\{1, x, x^2, x^3\}$, en bepaal de afstand tot deze vectorruimte.

Oefening 10.9.b Beschouw de Euclidische ruimte $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ van oefening 10.2 met $w(x) = 1$ voor alle $x \in [-\pi, \pi]$. Zet het stel vectoren $\{1, \cos x, \sin x\}$ om in een orthogonaal stel, met behulp van het Gram-Schmidt procédé.

Zoek de orthogonale projectie van de functie $y = x$ op de vectorruimte voortgebracht door $\{1, \cos x, \sin x\}$, en bepaal de afstand tot deze vectorruimte.

Oefening 10.9.c Beschouw de Euclidische ruimte $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ van oefening 10.2 met $w(x) = 1$ voor alle $x \in [-\pi, \pi]$. Zet het stel vectoren $\{1, x, \cos x\}$ om in een orthogonaal stel, met behulp van het Gram-Schmidt procédé.

Zoek de orthogonale projectie van de functie $y = \sin x$ op de vectorruimte voortgebracht door $\{1, x, \cos x\}$, en bepaal de afstand tot deze vectorruimte.

Oefening 10.10 (Examenvraag 2012). Beschouw de vectorruimte $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Voor $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ noteren we met $\text{Sp}(A)$ de som van de diagonaalelementen van A .

(a) Ga na dat de afbeelding

$$\theta : M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \text{Sp}(B^t \cdot A)$$

een inwendig product definieert op $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(b) Beschouw nu de deelruimte

$$U = \{M \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid M = M^t\}.$$

Wat is de dimensie van deze deelruimte?

(c) Stel nu $n = 2$. Bereken de beste benadering van de matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) in de deelruimte U (dit is het element van U zodat de afstand tot de gegeven matrix minimaal is).

Oefening 10.11 (Examenvraag 2014). Beschouw de Euclidische ruimte $E = \mathbb{R}^n$ met standaard inwendig inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Stel $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ een matrix met rang 1.

Beschouw de volgende afbeelding $m_A : E \rightarrow E : X \mapsto AX$. Veronderstel dat $V = (v_1, \dots, v_n)^t$ een basis is voor $\text{Im}(m_A)$.

(a) Bewijs dat $a_{ij} = v_i w_j$ voor een bepaalde vector $W = (w_1, \dots, w_n)^t$. Toon aan dat $A = VW^t$.

(b) Stel dat de matrix A een eigenwaarde $\lambda_1 \neq 0$ heeft. Bewijs dat elke vector $Z \neq \vec{0}$ waarvoor $\langle Z, W \rangle = 0$ een eigenvector van A is met eigenwaarde 0.

Voor $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ noteren we met $\text{Sp}(A)$ het spoor van A , m.a.w. de som van de diagonaalelementen van A .

(c) Veronderstel dat $\text{Sp}(A) \neq 0$. Toon aan dat $\lambda = \text{Sp}(A)$ een eigenwaarde van A is en bepaal een eigenvector voor λ .

(d) Veronderstel dat $\text{Sp}(A) = 1$. Toon aan dat m_A een projectie is, m.a.w. toon aan dat $A^2 = A$.

Oefening 10.12 (Examenvraag 2005). Gegeven is de matrix $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bepaal de verzameling

$$V = \{C \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid CP = (-P)^t C\}.$$

Toon aan dat V een deelruimte is van $M_{22}(\mathbb{R})$ en bepaal een orthonormale basis van V als $M_{22}(\mathbb{R})$ uitgerust is met inproduct

$$\langle C_1, C_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

$$\text{met } C_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ en } C_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Reeks 11

Oefening 11.1. Onderstel dat $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ een orthonormale basis is van een driedimensionale Euclidische ruimte. Bereken

a $(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) \times (-\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3);$

b $(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \times (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 1\vec{e}_3);$

c $(-2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 1\vec{e}_3) \times (\vec{e}_2 - \vec{e}_3).$

Oefening 11.2. Bewijs dat het vectorieel product in een driedimensionale Euclidische ruimte E voldoet aan de volgende eigenschappen, voor elke $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$.

1a $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \vec{y} \cdot \vec{z} \times \vec{x} = \vec{z} \cdot \vec{x} \times \vec{y};$

1b $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x};$

1c $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle \vec{y} - \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \vec{x};$

2a $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{0};$

2b $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2;$

2c $(\vec{x} - \vec{y}) \times (\vec{x} + \vec{y}) = 2\vec{x} \times \vec{y}.$

Oefening 11.3. Onderstel dat E een n -dimensionale Euclidische ruimte is. Schrijf de vergelijking neer van het hypervlak door een punt $\vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i$ en loodrecht op de vector $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$. Hierbij is $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ een orthonormale basis.

Oefening 11.4. In \mathbb{R}^n wordt een hypervlak door de oorsprong opgespannen door $n - 1$ vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$. Zoek een formule voor het orthogonaal complement van dit hypervlak (m.a.w. zoek een vector die loodrecht staat op de vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$).

Oefening 11.5. We werken in \mathbb{R}^n . Stel een formule op voor de afstand van $X \in \mathbb{R}^n$ tot het hypervlak met vergelijking (in een orthonormale basis):

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Oefening 11.6. In \mathbb{R}^3 beschouwen we de rechten ℓ_1 en ℓ_2 bepaald door de gegeven punten. Stel een stel parametervergelijkingen op voor de gemeenschappelijke loodlijn op ℓ_1 en ℓ_2 .

a ℓ_1 door de punten $(1, 1, 1)$ en $(1, 2, 3)$, en de rechte ℓ_2 door de punten $(1, -1, 0)$ en $(0, 1, -1)$;

b ℓ_1 door de punten $(8, 0, 1)$ en $(12, -3, -3)$, en de rechte ℓ_2 door de punten $(-7, 4, 3)$ en $(-3, -1, 1)$;

c ℓ_1 door de punten $(0, 0, 2)$ en $(1, 1, 3)$, en de rechte ℓ_2 door de punten $(0, -1, 0)$ en $(1, 2, 1)$.

Reeks 12

Oefening 12.1. Beschouw de volgende afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto 3a_1\bar{b}_1 + 2a_2\bar{b}_2 + ia_1\bar{b}_2 - ia_2\bar{b}_1$$

Met $\vec{a} = (a_1, a_2)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Toon aan dat deze afbeelding een Hilbertinproduct bepaalt op \mathbb{C}^2 .

Oefening 12.2. Bewijs dat in elke prehilbertruimte H volgende formule geldt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \frac{i}{4}\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - \frac{i}{4}\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2$$

voor elke $\vec{x}, \vec{y} \in H$.

Oefening 12.3. Zoek een orthogonale matrix met als eerste kolom

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

Oefening 12.4. Zoek een unitaire matrix met als eerste kolom

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1-i}{3} \\ \frac{2+i}{3} \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1+i}{3} \\ \frac{\sqrt{3}i}{3} \end{pmatrix}$$

Oefening 12.5. Vind een orthogonale matrix M zodat $M^t A_i M$ een diagonaalmatrix is.

a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c

$$A_5 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} ; A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Oefening 12.6. Bepaal een orthogonale matrix M zodat M^tAM en M^tBM tegelijkertijd diagonaal zijn.

a

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} ; B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 40 & 14 & -14 \\ 14 & 19 & -7 \\ -14 & -7 & 19 \end{pmatrix}$$

b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 4 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$$

Oefening 12.7. Bewijs dat een n -dimensionale prehilbertruimte H een orthonormale basis van eigenvectoren van $f : H \rightarrow H$ heeft als en alleen als er van nul verschillende orthogonale projecties $p_1, p_2, \dots, p_n : H \rightarrow H$ en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ bestaan zodat

1. $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n$;
2. $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1_H$;
3. $p_i \circ p_j = 0$ als $i \neq j$.

Oefening 12.8. Onderstel H een eindigdimensionale prehilbertruimte. Een lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ wordt *scheefhermitisch* genoemd als $f^\dagger = -f$. Bewijs dat elke lineaire afbeelding de som is van een hermitische en een scheefhermitische lineaire afbeelding.

Oefening 12.9. Bewijs dat alle eigenwaarden van een scheefhermitische lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ zuiver imaginair zijn.

Oefening 12.10 (Examenvraag 2006). Toon aan dat

$$\langle A, B \rangle = \text{Sp}(AB^\dagger)$$

een Hilbert inwendig product definieert op de \mathbb{C} -vectorruimte $M_{m,n}(\mathbb{C})$ van $m \times n$ -matrices over \mathbb{C} ($m, n \in \mathbb{N}_0$). Herinner dat, voor een vierkante matrix C , $\text{Sp}(C)$ de som is van de elementen op de hoofddiagonaal van C , en dat $A^\dagger = \overline{A}^t$.

Reeks 13

Oefening 13.1. Onderstel dat H een eindigdimensionale prehilbertruimte is. Een lineaire afbeelding $f : H \rightarrow H$ wordt *normaal* genoemd als f en f^\dagger commuteren, m.a.w.

$$f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$$

Toon aan dat unitaire, hermitische en schiefhermitische lineaire afbeeldingen normaal zijn.

Oefening 13.2. Onderstel dat $f : H \rightarrow H$ een normale lineaire afbeelding is. Bewijs achtereenvolgens

- (i) $f(\vec{v}) = \vec{0} \iff f^\dagger(\vec{v}) = \vec{0}$;
- (ii) $f - \lambda 1_H$ is normaal, voor elke λ ;
- (iii) $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \implies f^\dagger(\vec{v}) = \overline{\lambda} \vec{v}$;
- (iv) Als $f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$, $f(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$ en $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan is $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.
- (v) Bewijs nu dat er voor elke normale lineaire afbeelding een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat.

Oefening 13.3. Ga na welke van de volgende matrices A_i normaal zijn. Indien A_i normaal is, bepaal dan de eigenwaarden en een orthonormale basis van eigenvectoren.

a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} ; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} ; A_6 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

Oefening 13.4. Onderstel dat $f : V \rightarrow V$ normaal is (V is een eindigdimensionale prehilbertruimte). Toon aan dat $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^\dagger)$ en $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^\dagger)$.

Oefening 13.5. Onderstel dat $f, g : V \rightarrow V$ commuteren en dat f normaal is. Toon aan dat f en g^\dagger commuteren.

Oefening 13.6. Onderstel dat $f, g : V \rightarrow V$ normaal zijn en commuteren (m.a.w. $f \circ g = g \circ f$). Toon aan dat $f + g$ en $f \circ g$ ook normaal zijn.

Oefening 13.7. Toon aan dat $f : V \rightarrow V$ normaal is als en alleen als

$$\|f(\vec{v})\| = \|f^\dagger(\vec{v})\|$$

voor elke $\vec{v} \in V$.

Oefening 13.8. Beschouw $f : H \rightarrow H$ waarbij H een eindigdimensionale prehilbertruimte is. Toon aan dat de volgende eigenschappen equivalent zijn:

- (i) Er bestaat een hermitische $g : H \rightarrow H$ zodat $f = g \circ g$;
- (ii) Er bestaat een $h : H \rightarrow H$ zodat $f = h^\dagger \circ h$;
- (iii) f is hermitisch en $\langle f(\vec{v}), \vec{v} \rangle \geq 0$ voor elke $\vec{v} \in H$;
- (iv) f is hermitisch en alle eigenwaarden van f zijn niet-negatief.

Oefening 13.9. Zoek een unitaire matrix M zodat $M^\dagger A M$ een diagonaalmatrix is.

a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

b

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}$$

c

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Oefening 13.10. Toon aan dat \mathbb{R}^n met

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

een genormeerde ruimte is. Laat ook zien dat deze norm niet afkomstig is van een inwendig product op \mathbb{R}^n .

Reeks 14

In het vervolg is \mathbb{E}^n een n -dimensionale Euclidische ruimte. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ is een orthonormale basis van \mathbb{E}^n .

Oefening 14.1. Beschrijf de isometrieën $f_i : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$.

$$\begin{aligned}
 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \\
 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 f_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 f_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Oefening 14.2. Stel de vergelijking op van de spiegeling in \mathbb{E}^2 ten opzichte van de rechte met vergelijking

- a $x + 3y = 2$
- b $x - y = 3$
- c $x + y = 4$

Oefening 14.3. Stel de vergelijking op van de rotatie in \mathbb{E}^2 rond het punt $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ die de oorsprong op het punt $(2\sqrt{3}, 0)$ afbeeldt.

Oefening 14.4. Stel de vergelijking op van de schuifspiegeling in \mathbb{E}^2 ten opzichte van de rechte met vergelijking $x = y$ en met verschuiving over de vector $2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

Oefening 14.5. Wat kan men zeggen over een isometrie van \mathbb{E}^2 die

- 1) geen dekpunten heeft;
- 2) juist één dekpunt heeft;
- 3) een rechte dekpunten heeft.

Oefening 14.6. Wat kan men zeggen over een isometrie van \mathbb{E}^3 die

- 1) geen dekpunten heeft;
- 2) juist één dekpunt heeft;
- 3) een rechte dekpunten heeft;
- 4) een vlak dekpunten heeft.

Oefening 14.7. Welk soort isometrie van \mathbb{E}^3 beeldt het punt (x, y, z) af op

- 1) $(x, y, -z)$;
- 2) $(-y, x, z)$;

- 3) $(x, y, z + 1)$;
- 4) $(-y, x, z + 1)$;
- 5) $(-x, y, z + 1)$;
- 6) $(-y, x, -z)$;
- 7) $(x, -z + 2, -y + 3)$;
- 8) $(x, z - 1, y + 1)$.

Oefening 14.8. Beschrijf de isometriën $f_i: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$.

$$\begin{aligned}
 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 f_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Reeks 15

Oefening 15.1. g is een schuifspiegeling van \mathbb{E}^2 of \mathbb{E}^3 . Welk soort isometrie is $g \circ g$?

Oefening 15.2. Gegeven is de transformatie g van \mathbb{E}^3 bepaald door de formule

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 3 \\ x + 1 \\ y + 2 \end{pmatrix}$$

Toon aan dat g de samenstelling is van een rotatie en een verschuiving in de richting van de as van de rotatie. Bepaal de rotatie en de verschuiving.

Oefening 15.3. Gegeven is de transformatie g van \mathbb{E}^3 bepaald door de formule

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ z+3 \\ y+2 \end{pmatrix}$$

Toon aan dat g een schuifspiegeling is, dit wil zeggen dat g de samenstelling is van een spiegeling en een verschuiving over een vector gelegen in het vlak van deze spiegeling. Bepaal de spiegeling en de verschuiving.

Oefening 15.4.

- 1a Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de orthogonale projectie op het vlak met vergelijking $x - y + 3z = 1$.
- 2a Zelfde vraag voor de orthogonale spiegeling ten opzichte van het vlak met vergelijking $x - y + 3z = 1$.
- 3a Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrix van de rotatie over een hoek $\theta = \frac{\pi}{2}$ ten opzichte van de rechte met vergelijking $3x = -3y = z$.
- 4a Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een orthogonale matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de rotatie over een hoek $\theta = \frac{\pi}{2}$ rond de rechte met vergelijking $3x = -3y = z + 2$.
- 5a Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrix van de draaispiegeling bestaande uit de orthogonale spiegeling ten opzichte van het vlak met vergelijking $x - y + 3z = 0$, gevolgd door een rotatie over een hoek $\theta = \frac{\pi}{2}$ ten opzichte van de rechte door \vec{d} en loodrecht op dit vlak.
- 6a Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de orthogonale projectie op de rechte met vergelijking $3x = -3y = z + 2$.
- 1b Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de orthogonale projectie op het vlak met vergelijking $x + y = z + 1$.
- 2b Zelfde vraag voor de orthogonale spiegeling rond het vlak met vergelijking $x + y = z + 1$.
- 3b Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrix van de rotatie over een hoek $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rond de rechte met vergelijking $x = y = -z$.
- 4b Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een orthogonale matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de rotatie over een hoek $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rond de rechte met vergelijking $x - 1 = y = -z$.

- 5b Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrix van de draaispiegeling bestaande uit de orthogonale spiegeling ten opzichte van het vlak met vergelijking $x + y = z$, gevolgd door een rotatie over een hoek $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rond de rechte door \vec{d} en loodrecht op dit vlak.
- 6b Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de orthogonale projectie op de rechte met vergelijking $x - 1 = y = -z$.
- 1c Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de orthogonale projectie op het vlak met vergelijking $x + y + 2z = 1$.
- 2c Zelfde vraag voor de orthogonale spiegeling rond het vlak met vergelijking $x + y + 2z = 1$.
- 3c Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrix van de rotatie over een hoek $\theta = \frac{\pi}{2}$ rond de rechte met vergelijking $2x = 2y = z$.
- 4c Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een orthogonale matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de rotatie over een hoek $\theta = \frac{\pi}{2}$ rond de rechte met vergelijking $2x = 2y + 2 = z$.
- 5c Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrix van de draaispiegeling bestaande uit de orthogonale spiegeling ten opzichte van het vlak met vergelijking $x + y + 2z = 0$, gevolgd door een rotatie over een hoek $\theta = \frac{\pi}{2}$ rond de rechte door \vec{d} en loodrecht op dit vlak.
- 6c Bepaal in \mathbb{R}^3 (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de orthogonale projectie op de rechte met vergelijking $2x = 2y + 2 = z$.

Oefening 15.5. Stel de vergelijking op van de spiegeling in \mathbb{E}^3 ten opzichte van het vlak

- a1** $x + 3y = 4$;
a2 $x - 2y + z = 0$;
a3 $x - y + 2z = 0$;
b1 $4y + 3z = 1$;
b2 $x + 2y - 3z = 0$;
b3 $x - 2y + z = 1$;
c1 $2y + z = 2$;
c2 $x - y + 2z = 2$;
c3 $x + 2y - 3z = 3$.

Oefening 15.6. Stel de vergelijking op van de rotatie in \mathbb{E}^3 over de hoek θ over de gegeven as l .

- a1** $\theta = \pi/3$ en l is de doorsnede van de vlakken met vergelijking $x = y$ en $z = 0$;
a2 $\theta = \pi/3$ en l heeft parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

- b1** $\theta = \pi/4$ en l is de doorsnede van de vlakken met vergelijking $x+y=0$ en $y-z=0$;
b2 $\theta = \pi/4$ en l heeft parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

- c1** $\theta = \pi/6$ en l is de doorsnede van de vlakken met vergelijking $x=z$ en $y=0$;
c2 $\theta = \pi/6$ en l heeft parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$

Oefening 15.7.a Stel de vergelijking op van de rotatie in \mathbb{E}^3 over de hoek $\pi/3$ om de as $x=y$; $z=0$ gevolgd door de verschuiving over de vector $(1, 1, 0)$.

Oefening 15.7.b Stel de vergelijking op van de rotatie in \mathbb{E}^3 over de hoek $\pi/4$ om de as $1-x=y-1=z$ gevolgd door de verschuiving over de vector $(-1, 1, 1)$.

Oefening 15.7.c Stel de vergelijking op van de rotatie in \mathbb{E}^3 over de hoek $\pi/6$ om de as $x-1=z$; $y=2$ gevolgd door de verschuiving over de vector $(1, 0, 1)$.

Oefening 15.8. Gegeven is de isometrie van \mathbb{E}^3 gedefinieerd door de formule

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Welk soort isometrie is f ? Bepaal de dekpunten.

Oefening 15.9. Gegeven is de isometrie van \mathbb{E}^3 gedefinieerd door de formule

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Welk soort isometrie is f ? Bepaal de dekpunten.

Oefening 15.10. Stel in \mathbb{E}^3 de vergelijking op van de orthogonale transformatie die de samenstelling is van de spiegeling ten opzichte van het vlak met vergelijking $x+y+z=0$ gevolgd door de rotatie over de hoek $\pi/6$ om de rechte door de oorsprong en loodrecht op dit vlak.

Oefening 15.11. Stel in \mathbb{E}^3 de vergelijking op van het oppervlak dat men bekomt door de rechte met vergelijking $y=0=x-2z$ te laten wentelen om de z -as.

Reeks 16

Oefening 16.1. Bepaal in \mathbb{E}^2 de kwadratische vorm bepaald door de symmetrische matrix

$$\mathbf{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c)} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Oefening 16.2. Bepaal in \mathbb{E}^2 of \mathbb{E}^3 de symmetrische bilineaire vorm waaraan de kwadratische vorm q geassocieerd is.

- a1** $q(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$;
- a2** $q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz$;
- b1** $q(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$;
- b2** $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - xy + 2xz - 3yz$;
- c1** $q(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$;
- c2** $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4xy - 2xz - yz$.

Oefening 16.3. Bepaal de kwadratische vorm $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zodat

- a** $f(1, 0) = 2$, $f(2, 1) = 10$ en $f(-2, -3) = -10$;
- b** $f(2, -1) = 1$, $f(1, 4) = -1$ en $f(1, 0) = 2$;
- c** $f(1, 1) = 1$, $f(-2, 1) = 4$ en $f(0, 1) = 6$.

Oefening 16.4. Bepaal de kwadratische vorm $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geassocieerd met de bilineaire vorm b

- a** $b((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 4x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + y_1y_2$;
- b** $b((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 6x_1x_2 + 3x_1y_2 + x_2y_1 - y_1y_2$;
- c** $b((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + 2x_1y_2 + x_2y_1 - 3y_1y_2$.

Oefening 16.5. De kwadratische vorm $q : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wordt bepaald door de symmetrische matrix A ten opzichte van een gegeven basis. Toon aan dat q kan ontbonden worden als het product van twee lineaire vormen als en slechts als er $B, C \in \mathbb{R}^n$ bestaan zodat $A = BC^t$.

Oefening 16.6. Bepaal van de volgende kegelsneden de Euclidische standaardvergelijking, en beschrijf de coördinatentransformatie die nodig is om tot deze standaardvergelijking te komen. Bepaal ook de assen en de toppen, en beschrijf deze zowel in de oorspronkelijke als in de nieuwe basis.

- a1** $x^2 + 2x + y^2 = 0$;
- b1** $4x^2 + 11y^2 + 24xy = 1$;
- c1** $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x + 4y + 1 = 0$;
- a2** $-x^2 - y^2 + 2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2 = 0$;
- b2** $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 10 = 0$;
- c2** $4x^2 - 4xy + y^2 - x = 0$;
- a3** $x^2 - 2xy + y^2 + x - 1 = 0$;
- b3** $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 2y = 0$;
- c3** $4x^2 + y^2 - 4xy - 12x + 6y - 7 = 0$;
- a4** $6x^2 - 9y^2 - 8x + 3y + 16 = 0$.

Oefening 16.7. Bepaal van de volgende kwadrieken de Euclidische standaardvergelijking, en beschrijf de coördinatentransformatie die nodig is om tot deze standaardvergelijking te komen.

a1 $y^2 + z^2 + x + y = 0;$

b1 $z^2 - xy = 1;$

c1 $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 6xz + 12yz + 2x - 4y - 6z = 0;$

a2 $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2yz + z^2 - x + y - 2z - 8 = 0;$

b2 $x^2 - y^2 - 2z^2 + 4x - 2y + 16z - 30 = 0;$

c2 $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 12xy - 8xz - 4yz + 14x + 16y - 12z + 38 = 0;$

a3 $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 5x + 7y + 7z + 1 = 0;$

b3 $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 14x + 14y + 6z + 1 = 0;$

c3 $y^2 + z^2 - 2yz - 2x + 2z = 0;$

a4 $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz + 2y + 6z - 1 = 0.$

Oplossingen

Oefening 9.1

a $p_A(\lambda) = -\lambda^3$, $\lambda = 0 : \{(x, y, z) | y = z = 0\}$. Niet diagonaliseerbaar.

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8,$$

$$\lambda = 4 : \{(x, y, z) | 2x = 7z, y = -2z\}.$$

$$\lambda = 2 : \{(x, y, z) | y = z = 0\}.$$

$$\lambda = 1 : \{(x, y, z) | -x = y = z\}. \text{ Diagonaliseerbaar.}$$

b $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5$,

$$\lambda = 5 : \{(x, y, z) | x = 2y, z = 0\}.$$

$$\lambda = 1 : \{(x, y, z) | x = -z, y = 0\}.$$

$$\lambda = -1 : \{(x, y, z) | z = -3x, y = 2x\}. \text{ Diagonaliseerbaar.}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4),$$

$$\lambda = 4 : \{(x, y, z) | x = z, y = 0\}.$$

$$\lambda = 1 : \{(x, y, z) | z = 4x, y = -6x\}.$$

$$\lambda = -1 : \{(x, y, z) | 2x + 3z = 0, y = 0\}. \text{ Diagonaliseerbaar.}$$

c $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$,

$$\lambda = 2 : \{(x, y, z) | 3x = y = -3z\}.$$

$$\lambda = -1 : \{(x, y, z) | 2x = -2y = z\}.$$

$$\lambda = 0 : \{(x, y, z) | x = y = z\}. \text{ Diagonaliseerbaar.}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)^2,$$

$$\lambda = 0 : \{(x, y, z) | x + z = 0, y = 0\}.$$

$$\lambda = 1 : \{(x, y, z) | x = 0\}. \text{ Diagonaliseerbaar.}$$

Oefening 9.2

a $\lambda^2 - 8\lambda + 9$; $\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1$,

b $\lambda^2 - 5\lambda + 6$; $-\lambda^3 + \lambda^2 + 24\lambda + 36$,

c $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3$.

Oefening 9.4

a $\{e^u, e^{-u}\}$,

b $\{\cos x, \sin x\}$,

c Er bestaat geen basis van V die D^3 diagonaliseert. (V is hier een reële vectorruimte. Als je over de complexe getallen werkt is er wel een basis: $\{\cos x - i \sin x, \cos x + i \sin x\}$.)

Oefening 9.5

a $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en $A^9 = 2^8 \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

b $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en $B^{16} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{16} + 2^{17} & -2 \cdot 5^{16} + 2^{17} \\ -5^{16} + 2^{16} & 2 \cdot 5^{16} + 2^{16} \end{pmatrix}$,

c $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ en $C^{31} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2^{32} - 5^{31} & -2^{32} + 2 \cdot 5^{31} \\ -2^{31} + 5^{31} & -2^{31} - 2 \cdot 5^{31} \end{pmatrix}$.

Oefening 9.7

a Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Basis : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Diagonaalmatrix : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Oefening 9.8

$$\mathbf{a} \text{ Basis : } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ Bovendriehoeksmatrix : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} \text{ Basis : } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ Bovendriehoeksmatrix : } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} \text{ Basis : } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ Bovendriehoeksmatrix : } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oefening 10.1

a 1a geen inwendig product, 2a inwendig product, 3a geen inwendig product.

b 1b inwendig product, 2b geen inwendig product, 3b inwendig product.

c 1c geen inwendig product, 2c geen inwendig product, 3c geen inwendig product.

Oefening 10.3

a 1a 11 ; 2a $n \neq m : 0, n = m \neq 0 : \pi, n = m = 0 : 2\pi$;

b 1b -13 ; 2b $\frac{2}{3}$;

c 1c 12 ; 2c 0 .

Oefening 10.4

a 1a $\cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}}$; 1a $\cos\theta = \frac{20}{9\sqrt{5}}$; 2a $n \neq m : \cos\theta = 0, n = m : \cos\theta = 1$;

b 1b $\cos\theta = -\frac{13}{\sqrt{3531}}$; 2b $\cos\theta = \frac{\sqrt{70}}{12}$;

c 1c $\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{330}}$; 2c $\cos\theta = 0$.

Oefening 10.8

$$\mathbf{a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{b} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{c} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Oefening 10.9

a orthogonaal stel: $\{1, x, x^2 - \frac{\pi^2}{3}, x^3 - \frac{3}{5}\pi^2 x\}$, orthogonale projectie: $-\frac{45}{2\pi^4}(x^2 - \frac{\pi^2}{3})$, afstand: $(\pi - \frac{90}{\pi^3})^{1/2}$.

b orthogonaal stel : $\{1, \cos x, \sin x\}$, orthogonale projectie : $2 \sin x$, afstand : $(\frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi)^{1/2}$.

c orthogonaal stel : $\{1, x, \cos x\}$, orthogonale projectie : $\frac{3}{\pi^2}x$, afstand : $(\frac{\pi^2-6}{\pi})^{1/2}$

Oefening 11.1

a $-15\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$

b $-2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$

c $-2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

Oefening 11.6

a $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 5t \\ y = -2t \\ z = -\frac{1}{2} + t \end{cases}$

b $\begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

c $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$

Oefening 12.3

a $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{9}{\sqrt{490}} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{490}} \\ -\frac{3}{7} & 0 & \frac{20}{\sqrt{490}} \end{pmatrix}$

Oefening 12.4

a $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 0 & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{b} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1+i}{2} & \frac{\sqrt{2}(i-2)}{6} \\ \frac{1-i}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1+3i}{6} \\ \frac{2+i}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{45}} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{2+2i}{\sqrt{45}} \\ \frac{i\sqrt{3}}{3} & \frac{1-i}{\sqrt{5}} & \frac{2i\sqrt{3}}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}.$$

Oefening 12.5

a

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ en } M^t A_1 M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ en } M^t A_2 M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ en } M^t A_3 M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ en } M^t A_4 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

c

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ en } M^t A_5 M = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ en } M^t A_6 M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oefening 12.6

a

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, M^t A M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } M^t B M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

b

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, M^t A M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ en } M^t B M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, M^t A M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ en } M^t B M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oefening 13.3

a A_1 is niet normaal,

$$A_2 \text{ eigenwaarden } 2, 2 \pm 2i, \text{ basis : } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{b } A_3 \text{ eigenwaarden } 2 \pm i, \text{ basis : } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\},$$

A_4 is niet normaal,

$$\text{c } A_5 \text{ eigenwaarden } \pm ia, \text{ basis : } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\},$$

$$A_6 \text{ eigenwaarden } \pm i\sqrt{2}, \text{ basis : } \left\{ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -i(1+\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} i(\sqrt{2}-1) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Oefening 13.9

$$\text{a } M = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ en } M^t A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i+1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ en } M^t A M = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{c } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ en } M^t A M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oefening 14.1 1) verschuiving over $(0, -1)$

2) rotatie om $(0,0)$ over de hoek $-\arccos(3/5)$

3) rotatie om $(5, -5)$ over de hoek $-\arccos(3/5)$

4) spiegeling ten opzichte van de rechte $x = 2y$

5) spiegeling ten opzichte van de rechte $x = 2y + 5$

6) samenstelling van de spiegeling ten opzichte van de rechte $x = 2y$ en de verschuiving over $(3, -2)$.

Oefening 14.2 a $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$

b $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

c $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Oefening 14.3 $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Oefening 14.4 $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Oefening 14.5 1 echte schuifspiegeling of verschuiving

2 rotatie verschillend van de identiteit

3 spiegeling ten opzichte van een rechte.

Oefening 14.6 1 verschuiving, rotatie gevolgd door een verschuiving evenwijdig met de rotatieas of schuifspiegeling

2 rotatie gevolgd door spiegeling om een vlak loodrecht op de rotatieas (spiegelrotatie)

3 rotatie verschillend van de identiteit

4 spiegeling ten opzichte van een vlak.

Oefening 14.7

1 Orthogonale spiegeling t.o.v. het xy -vlak.

2 Rotatie rond de z -as over een hoek $\pi/2$.

3 verschuiving over $(0, 0, 1)$.

4 Schroefbeweging : rotatie rond de z -as over een hoek $\pi/2$, gevolgd door een verschuiving over $(0, 0, 1)$.

5 Schuifspiegeling : orthogonale spiegeling t.o.v. het yz -vlak, gevolgd door een verschuiving over $(0, 0, 1)$.

6 Draaispiegeling : rotatie rond de z -as over een hoek $\pi/2$, gevolgd door een orthogonale spiegeling t.o.v. het xy -vlak.

7 Schuifspiegeling : orthogonale spiegeling t.o.v. het vlak $y+z=0$, gevolgd door een verschuiving over $(0, 2, 3)$.

8 Orthogonale spiegeling t.o.v. het vlak $z = y + 1$.

Oefening 14.8

1 Rotatie rond de z -as over een hoek θ waarvoor $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\sin \theta = \frac{-4}{5}$.

2 Orthogonale spiegeling t.o.v. het vlak $y = 2x$.

3 Rotatie rond de rechte $y = 2z = 2x$, over een hoek π .

4 Rotatie rond de rechte $x = 2y = 2z$, over een hoek θ waarvoor $\cos \theta = -\frac{1}{5}$.

5 Rotatie rond de rechte $x = z, y = 0$, over een hoek θ waarvoor $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

Oefening 15.1 Een verschuiving.

Oefening 15.2 Rotatie rond de rechte $x_1 - 1 = x_2 = x_3$ over een hoek θ waarvoor $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, gevolgd door een verschuiving over $(2, 2, 2)$.

Oefening 15.3 Orthogonale spiegeling t.o.v. het vlak $x_2 = x_3 + \frac{1}{2}$, gevolgd door een verschuiving over de vector $(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

Oefening 15.4

$$1a \ A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$2a \ A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$3a \ A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -1 + -3\sqrt{11} & 3 - \sqrt{11} \\ -1 + 3\sqrt{11} & 1 & -3 - \sqrt{11} \\ 3 + \sqrt{11} & -3 + \sqrt{11} & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{en } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$4a \ A \text{ zoals in 3a en } B = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 2\sqrt{11} \\ -6 - 2\sqrt{11} \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$5a \ A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 1 - 3\sqrt{11} & -3 - \sqrt{11} \\ 1 + 3\sqrt{11} & -1 & 3 - \sqrt{11} \\ -3 + \sqrt{11} & 3 + \sqrt{11} & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{en } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$6a \ A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$1b A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$2b A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$3b A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & -1 + \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ en } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$4b A \text{ zoals in 3b en } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$5b A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} & -1 & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ en } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$6b A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$1c A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$2c A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$3c A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2\sqrt{6} & 2 + \sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{6} & 1 & 2 - \sqrt{6} \\ 2 - \sqrt{6} & 2 + \sqrt{6} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ en } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$4c \text{ A zoals in 3b en } B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1-2\sqrt{6} \\ -5 \\ 2+\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

$$5c \text{ A} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1-2\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} \\ -1+2\sqrt{6} & -1 & -2-\sqrt{6} \\ -2-\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{en } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$6c \text{ A} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oefening 15.5

$$a_1 \begin{cases} x' = (4x - 3y + 4)/5 \\ y' = (-3x - 4y + 12)/5 \\ z' = z \end{cases}$$

$$a_2 \begin{cases} x' = (2x + 2y - z)/3 \\ y' = (2x - y + 2z)/3 \\ z' = (-x + 2y + 2z)/3 \end{cases}$$

$$a_3 \begin{cases} x' = (2x + y - 2z)/3 \\ y' = (x + 2y + 2z)/3 \\ z' = (-2x + 2y - z)/3 \end{cases}$$

$$b_1 \begin{cases} x' = x \\ y' = (-7y - 24z + 8)/25 \\ z' = (-24y + 7z + 6)/25 \end{cases}$$

$$b_2 \begin{cases} x' = (6x - 2y + 3z)/7 \\ y' = (-2x + 3y + 6z)/7 \\ z' = (3x + 6y - 2z)/7 \end{cases}$$

$$b_3 \begin{cases} x' = (2x + 2y - z + 1)/3 \\ y' = (2x - y + 2z - 2)/3 \\ z' = (-x + 2y + 2z + 1)/3 \end{cases}$$

$$c_1 \begin{cases} x' = x \\ y' = (-3y - 4z + 8)/5 \\ z' = (-4y + 3z + 4)/5 \end{cases}$$

$$c_2 \begin{cases} x' = \frac{2x+y-2z+2}{3} \\ y' = \frac{x+2y+2z-2}{3} \\ z' = \frac{-2x+2y-z+4}{3} \end{cases}$$

$$c_3 \begin{cases} x' = (6x - 2y + 3z + 3)/7 \\ y' = (-2x + 3y + 6z + 6)/7 \\ z' = (3x + 6y - 2z - 9)/7 \end{cases}$$

Oefening 15.6

$$a_1 \text{ Matrix van de lineaire afbeelding } \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$a_2 \text{ Matrix van de lineaire afbeelding zoals in } a_1, \text{ verschuiving over } \begin{pmatrix} \frac{1-2\sqrt{6}}{4} \\ \frac{-1+2\sqrt{6}}{4} \\ 1 + \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}.$$

$$b_1 \text{ Matrix van de lineaire afbeelding } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$b_2 \text{ Matrix van de lineaire afbeelding zoals in } b_1, \text{ verschuiving over } \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$$c_1 \text{ Matrix van de lineaire afbeelding } \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix},$$

$$c_2 \text{ Matrix van de lineaire afbeelding zoals in } c_1, \text{ verschuiving over } \begin{pmatrix} \frac{2+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{3} + 2 \\ \frac{-2-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Oefening 15.7

a Matrix van de lineaire afbeelding zoals in c_1 van vorige oefening, verschuiving over

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b Matrix van de lineaire afbeelding zoals in b_1 van vorige oefening, verschuiving over

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

c Matrix van de lineaire afbeelding zoals in c_1 van vorige oefening, verschuiving over

$$\begin{pmatrix} \frac{6+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{3} + 2 \\ \frac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

Oefening 15.8 Draaispiegeling, fixpunt $(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$.

Oefening 15.9 Draaispiegeling, fixpunt $(-1/3, 10/3, 1)$, vlak $x + y + z = 4$, rechte $x + 1/3 = y - 10/3 = z - 1$, rotatiehoek $\theta = 4\pi/3$.

$$\text{Oefening 15.10 } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 \\ -\sqrt{3}-1 & -1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}.$$

Oefening 15.11 Kegels met vergelijking $x^2 + y^2 = 4z^2$.

Oefening 16.1

a $q(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$,

b $q(x, y) = 2x^2 + 8xy + y^2$,

c $q(x, y) = x^2 + 14xy + 2y^2$.

Oefening 16.2

$a_1 b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$,

$a_2 b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2$,

$b_1 b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$,

$b_2 b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - \frac{3}{2}x_2y_3 - \frac{3}{2}x_3y_2$,

$c_1 b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$,

$c_2 b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2$.

Oefening 16.3

a $f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 4y^2$,

b $f(x, y) = 2x^2 + \frac{109}{36}xy - \frac{17}{18}y^2$,

c $f(x, y) = -2x^2 - 3xy + 6y^2$.

Oefening 16.4

a $f(x, y) = 4x^2 + 5xy + y^2$,

b $f(x, y) = 6x^2 + 4xy - y^2$,

c $f(x, y) = 3x^2 + 3xy - 3y^2$.

Oefening 16.6 Assen en toppen zijn uitgedrukt t.o.v. de standaardbasis.

a₁ $u^2 + v^2 = 1$, cirkel. Elke rechte door $(-1, 0)$ is as, elk punt van de ellips is top.

b₁ $20u^2 - 5v^2 = 1$, hyperbool. Assen $3x + 4y = 0$ en $4x - 3y = 0$, toppen $(\frac{3}{5\sqrt{20}}, \frac{4}{5\sqrt{20}})$ en $(\frac{-3}{5\sqrt{20}}, \frac{-4}{5\sqrt{20}})$.

c₁ $6u^2 + v^2 = 1$, ellips. Assen $x - 1 = 2y$ en $2x + y = 2$, toppen $(1 + \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}})$, $(1 - \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})$, $(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, en $(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$.

a₂ $u^2 = v$, parabool. As $x = y$, top $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

b₂ $-5u^2 = 1$, leeg. Elke rechte is as, geen toppen.

c₂ $5\sqrt{5}u^2 = v$, parabool. As $2x - \frac{1}{5} = y$, top $(\frac{1}{25}, \frac{-3}{25})$.

a₃ $2\sqrt{2}u^2 + v = 0$, parabool. As $x - y = -\frac{1}{4}$, top $(\frac{15}{16}, \frac{19}{16})$.

b₃ $\sqrt{2}u^2 = v$, parabool. As $x + y = \frac{3}{2}$, top $(-\frac{3}{8}, \frac{15}{8})$.

c₃ $\frac{5}{16}u^2 = 1$, twee evenwijdige rechten. Assen $2x = y + 3$ en $x + 2y = l$ met $l \in \mathbb{R}$, elk punt van de kegelsnede is top.

a₄ $\frac{108}{163}u^2 - \frac{72}{163}v^2 = 1$, hyperbool. Assen $y = \frac{1}{6}$ en $x = \frac{2}{3}$, toppen $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{163}}{\sqrt{108}})$ en $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{163}}{\sqrt{108}})$.

Oefening 16.7

a₁ $u^2 + v^2 + w = 0$, elliptische paraboloiden.

b₁ $u^2 + \frac{v^2}{2} - \frac{w^2}{2} = 1$, eenbladige hyperboloiden.

c₁ $14u^2 = 1$, twee evenwijdige vlakken.

a₂ $\frac{3\sqrt{3}}{4}u^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}v^2 = w$, elliptische paraboloiden.

b₂ $u^2 - v^2 - 2w^2 = 1$, twebladige hyperboloiden.

c₂ $\frac{3}{23}u^2 + \frac{6}{23}v^2 - \frac{9}{23}w^2 = 1$, eenbladige hyperboloiden.

a₃ $\frac{2\sqrt{3}}{3}u^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}v^2 + w = 0$, elliptische paraboloiden.

b₃ $\frac{u^2}{10} + \frac{3v^2}{20} + \frac{3w^2}{10} = 1$, ellipsoïden.

c₃ $\frac{2}{\sqrt{6}}u^2 + v = 0$, parabolische cilinder.

a₄ $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{70}}u^2 + v = 0$, parabolische cilinder.

Bibliografie

- [1] M. Artin, Algebra, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [2] P.M. Cohn, Algebra Volume I, John Wiley, New York, 1974.
- [3] S. Lang, Linear Algebra, Addison-Wesley, 1965.
- [4] B. Kolman, Elementary Linear Algebra, MacMillan, New York, 1970.
- [5] S. Caenepeel, Wiskundige Analyse Deel I, Dienst Uitgaven VUB, Brussel, 2002.
- [6] S. Caenepeel, Wiskundige Analyse Deel II, Dienst Uitgaven VUB, Brussel, 2002.

Index

- afstand, 15, 35
- afstand tot een deelruimte, 21
- antiverplaatsing, 48
- Banachruimte, 45
- bilineaire afbeelding, 14
- Cauchyrij, 45
- Cayley-Hamilton, 12
- convergentie v.e. rij vectoren, 45
- cosinus hyperbolicus, 83
- dekpunt, 26
- draaispiegeling, 57
- driehoeksongelijkheid, 16
- eenbladige hyperboloïde, 77
- eigenvector, 4
- eigenwaarde, 4
- ellips, 73
- ellipsoïde, 76
- elliptische cilinder, 79
- elliptische kegel, 78
- elliptische parabloïde, 80
- Euclidische ruimte, 15
- fixpunt, 26
- genormeerde ruimte, 16, 44
- georiënteerd volume, 30
- groep, 47
- hermitisch toegevoegde afbeelding, 38
- hermitische lineaire afbeelding, 38
- hermitische matrix, 38
- Hilbert inwendig product, 35
- Hilbertruimte, 45
- hyperbolische cilinder, 79
- hyperbolische parabloïde, 81
- hyperbool, 74
- indefinit, 60
- inproduct, 15
- inwendig product, 14
- isometrie, 46
- Jordanblokken, 11
- Jordanvorm, 11
- karakteristieke veelterm, 4
- karakteristieke vergelijking, 4
- kegelsnede, 73
- kwadratische functie, 70
- kwadratische vorm, 59
- kwadriek, 70
- lengte van een vector, 15, 35
- lineair onafhankelijke rij, 19
- loodrechte stand, 17
- middelpunt, 51
- negatief definit, 60
- negatief georiënteerde basis, 29
- negatief semidefinit, 60
- negatieve isometrie, 48
- niveauhyperoppervlak, 52
- norm van een vector, 15, 35
- normale lineaire afbeelding, 96
- omwentelingssymmetrische functie, 53
- omwentelingssymmetrisch deel, 53
- orthogonaal complement, 20, 37
- orthogonaal stel, 18
- orthogonaal stel vectoren, 36
- orthogonale basis, 18, 36
- orthogonale directe som, 21, 37
- orthogonale lineaire afbeelding, 24

orthogonale matrix, 25
 orthogonale projectie, 21, 49
 orthogonale vectoren, 17, 36
 orthonormaal stel, 18
 orthonormale basis, 18

parabolische cilinder, 82
 parabool, 74
 parametervoorstelling, 83
 positief definitief, 15, 35, 60
 positief georiënteerde basis, 29
 positief semidefinitief, 60
 positieve isometrie, 48
 prehilbertruimte, 35
 puntsymmetrie, 49

rechterhandregel, 29
 rotatie, 52

scheefhermitische afbeelding, 95
 schroefbeweging, 57
 schuifspiegeling, 55, 56
 sesquilineaire afbeelding, 35
 sinus hyperbolicus, 83
 spiegeling, 49
 spiegelrotatie, 57
 standaard inwendig product, 35
 standaardvergelijking v.e. kwadriek, 73
 stelling van Pythagoras, 18
 stelling van Sylvester, 63
 symmetrie, 49
 symmetrieas, 51
 symmetrievlak, 51
 symmetrisch deel, 51
 symmetrische afbeelding, 14
 symmetrische functie, 51
 symmetrische matrix, 24

toegevoegd symmetrisch, 35
 toegevoegde lineaire afbeelding, 23
 twebladige hyperboloïde, 78

unitaire lineaire afbeelding, 38
 unitaire matrix, 39

vectorieel product, 32

verplaatsing, 48
 volledigheid v.e. genormeerde ruimte, 45

zadeloppervlak, 81
 zelftoegevoegde lineaire afbeelding, 24